

# 数の概念と四則演算

2015年4月27日

# はしがき

2年近く前に「数について」という論文を書いた（書いたと言っても自分のホームページで公開しているだけであるが）。そこでは「とりあえず今の理解をここに記した」と書いた。つまりよくわかっていなかったのである。その後すっかりわかっているつもりになった。それでその「数について」を改訂しようと思った。又、これはあまりにも読みづらいので読みやすくしようと思った。

私は数を現実の世界を記述する言語として扱った。一方現代数学では数はペアノの公理を出発点として構成される。これは集合要素間に関係を作って数を構成する方法である。私は現代数学の方法について何か言える程の知識もない。ただこの方法だと日々我々が接している数と現代数学の数とどう関係があるのかわからないという欠点がある。私は現実の世界に興味がある。

私はこの論文でなぜ  $2 \times 3 = 3 \times 2$  なのか。つまり、なぜ掛ける数と掛けられる数を入れ替えても同じ数を表わすのか。なぜ  $2/7 \div 5/7 = 2/7 \times 7/5$  なのか。つまり、分数で割ると分母と分子が入れ替わるのか。なぜ  $(-2) \times (-3) = 6$  なのか。つまり、なぜ負の数と負の数を掛けると正の数になるのか。そのようなことを明快にしたいと思う。私は物理を勉強してきて、このような計算法に完全に慣れ親しんでいたが、その理由を答えられなかったのである。

今回は新たに無理数と複素数の章を設けた。これは簡単に触れているだけであり、付録のようなものである。分数の定義と説明には改善の余地が大いにあると思っている。分数を単に「ある連続量を用いて別の連続量を表わすものである」と定義した方がいいと思っている。ただ今の私にはその方法で説明する能力と時間がないので平凡な方法で定義したのである。連続量の説明も中途半端になってしまったと思っている。いくつか参考という枠組みの欄を設けたが、参考程度に読んでもらえればいいと思って書いた。

この論文に取りかかって約半年かかった。いずれまた改訂したいと思っている。

2015年4月

2021年7月 明らかな誤植を訂正しました。

# 目次

はしがき	1
<b>第 1 章 自然数</b>	<b>4</b>
1.1 自然数の概念	4
1.2 四則演算について	5
1.3 足し算	5
1.4 引き算	6
1.5 掛け算	6
1.6 割り算	7
1.7 演算における等式について	7
1.8 足し算引き算についての等式	8
1.9 割り算・掛け算についての等式	11
1.10 分配則	15
<b>第 2 章 分数</b>	<b>18</b>
2.1 序	18
2.2 連続量の性質	19
2.3 連続量についての定理	22
2.4 分数の定義、単位の定義、表わされる量の定義	24
2.5 足し算	24
2.6 引き算	25
2.7 掛け算	25
2.8 割り算	26
2.9 補足	27
2.10 分数での等式	27
2.11 分数の等式のまとめ	30
2.12 分数概念の応用 指数	31
<b>第 3 章 正と負の数</b>	<b>33</b>
3.1 正と負の数の概念	33
3.2 足し算	34
3.3 引き算	34
3.4 逆数と逆演算子と負数の記号	34

3.5	掛け算	35
3.6	割り算	37
3.7	掛け算はいったい何を表わしているか	38
3.8	割り算はいったい何を表わしているか	40
3.9	正と負の数での等式	41
3.10	正と負での等式のまとめ	44
<b>第4章</b>	<b>無理数</b>	<b>45</b>
4.1	量を表わす数としての無理数	45
4.2	数学としての無理数	45
<b>第5章</b>	<b>複素数</b>	<b>47</b>
5.1	足し算	47
5.2	引き算	47
5.3	掛け算	48
5.4	割り算	48
5.5	複素数の等式	50
5.6	複素数の等式のまとめ	50

# 第 1 章

## 自然数

### 1.1 自然数の概念

自然数とはよく知られているように 1 から始まって、2,3,4..... と続く数のことである。この章では自然数と言わずに簡潔に数と言うことにしよう。その数の概念だがこれを説明するのは非常に難しいことである。概念と言うものは別の言葉で言い表わせるものではないからである。我々は青色の感覚を持つ。そして他人が青色という言葉を使うのを繰り返し聞いて、それが我々の青色の感覚を表わしていること知るのである。決して他の言葉で青色を説明することはできない。熱いや辛いなどの概念も同様である。数の概念は青色や熱いなどの単純な感覚を表わすものではない。しかし数の概念も経験から獲得するのである。

**自然数の定義** 数とは同種の集まりのある性質を表わす言葉であり、その性質は他の集まりと一対一対応するかどうかという事実によって区別される。

というのが私なりの数に対する説明である。同種の集まりとは、リンゴの集まりとか、果物の集まりとか何か共通点のあるものの集まりである\*1。集まりの「性質」とは例えばあるリンゴの集まりであったなら、この集まりは大きさが揃いだとか、赤いリンゴが多いとか、いろいろ性質があろう。そして、この集まりの「数」というのも、この集まりの性質であり、「性質」とはそのことを言っているのである。2つの集まりがあり、それが一対一に対応がつけば、すなわち過不足がなければ、その2つの集まりは「数」という性質に関しては同じであり、一対一対応がつかない、すなわちどちらかに余りができれば数という性質に関しては異なるのである。図 1.1 のように、みかんの集まりと、リンゴの集まりがあり。それが一対一対応がつけば、このみかんの

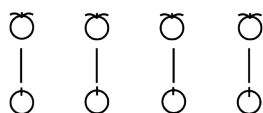


図 1.1

集まりとリンゴの集まりは数という性質に関しては同じだと言えるのである。図 1.2 のように一対一対応がつかない場合は、数と言う性質に関しては異なるのである。

その数を表わすのに指で表わしてもよい。指を 3 本だしてリンゴの数を表わせば、この指 1 本 1 本とリン

\*1 実際は我々がなにか集まりというものを頭に思い浮かべるときは、すでに共通点をもったものを想定しているのだが。

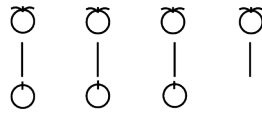


図 1.2

ゴが 1 対 1 に対応がつくということがわかる。もちろん小石を使ってもよい。しかし指や小石では数が多いと大変である。それで我々は (1,2,3,4,...) などという音声、文字の集まりを考えつき、それを他の集まりと対応させているわけである。そして「このリングは (1,2,3,4) と 1 対 1 の対応がつく」というのも面倒なので (1,2,3,4) の最後の文字「4」を使って「ここにリングが 4 個ある」というのである。

## 1.2 四則演算について

これから足し算、引き算、掛け算、割り算といういわゆる四則演算を考察していくわけだが、これらは 2 つの数を用いて 1 つの数を表わすことであるということを強調しておきたい。一般に計算とは数を 10 進数に直すことに他ならないが、この論文で述べる四則演算は決して 10 進数に直すことではない。あくまで 2 つの数を使って 1 つの数を表わすことである。3 × 5 というのも 1 つの数を表わしており\*2、15 というのも 1 つの数を表わしている。前者を 10 進数に直したものが後者である。3 が 5 個というのを、10 が 1 つと 1 が 5 個と言いなおしているわけである。どちらがよりよいというものではなく、便利な表現方法をその都度使えばいいわけである。

### 参考

現代数学では自然数は以下の 4 つの性質を満たす集合  $N$  として定義される。

- I 1 という対象があり  $N$  は 1 を元として持つ
- II  $N$  からそれ自身への単射写像  $\varphi : N \rightarrow N$  がある。
- III  $1 \notin \varphi(N)$
- IV  $N$  の部分集合  $A$  が次の 2 つの条件 (a)(b) を満たせば  $A = N$  となる。
  - (a)  $1 \in A$
  - (b)  $\varphi(A) \subset A$

## 1.3 足し算

ここに昨日取ってきた 5 個のリングがある。あそこに今日取ってきた 3 個のリングがある。昨日取ってきたリングと今日取ってきたリングを合わせたとき、そのリングの数を  $5 + 3$  と書く。これが足し算である。もう少しいかめしく書くと

\*2  $3 \times 5$  は普通、式と言われるが、概念としては数である。2 つの数字を使っているので式と言われるのであろう。

自然数の足し算の定義 足し算とは  $A$  が  $M$  個あり、別に  $A$  が  $N$  個あり、その 2 つを合わせたときの  $A$  の数を  $M$  と  $N$  で表わすことである。それを  $M + N$ 、又は  $N + M$  と書く。

足し算の概念自体に何も難しいことはないであろう。

## 1.4 引き算

リンゴが 5 個あり、そこから 2 個取り去ったときの残りのリンゴの数を 5 と 2 で表わすことを引き算という。すなわち

自然数の引き算の定義 引き算とは  $A$  が  $M$  個あり、そこから  $A$  を  $N$  個取り去ったときの残りの  $A$  の数を  $M$  と  $N$  で表わすことである。それを  $M - N$  と書く。

引き算は足し算の逆算になっている。すなわち 5 個加えたのち、5 個取り去ると元に戻る。又、5 個取り去ったのち 5 個加えても元に戻るということである。

## 1.5 掛け算

リンゴが 5 個あり、そのリンゴ 5 個が 3 個あるときのリンゴの数を 5 と 3 を使って表わすことを掛け算という。その数を  $5 \times 3$  と書く。すなわち

自然数の掛け算の定義 掛け算とは  $A$  が  $M$  個が  $N$  個あるときの  $A$  の数を  $M$  と  $N$  で表わすことである。それを  $M \times N$  と書く。

掛け算の重要な性質として掛ける数と掛けられる数が入れ替わっても同じ数を表わすということがある。すなわち  $5 \times 3 = 3 \times 5$  である。理由は図 1.3 を見れば明らかなように横に 5 個ならんだマスが 3 個あるのは、縦に 3 個並んだものが 5 個あると言ってもいいからである。リンゴ 5 個が 3 個ということは 5 個のリンゴのどのリンゴも 3 個になるということである。コピーされるといってもいい。すなわち図 1.3 のように 1,2,3,4,5 が (1-1, 1-2, 1-3, 1-4, 1-5), (2-1, 2-2, 2-3, 2-4, 2-5), (3-1, 3-2, 3-3, 3-4, 3-5) とコピーされるということである。そうすれば 5 個が 3 個と 3 個が 5 個と等しいことが了解されよう。

3-1	3-2	3-3	3-4	3-5
2-1	2-2	2-3	2-4	2-5
1-1	1-2	1-3	1-4	1-5

図 1.3

定理 1.1  $A$  が  $M$  個が  $N$  個の  $A$  の数と  $A$  が  $N$  個が  $M$  個の  $A$  の数は等しい。

## 1.6 割り算

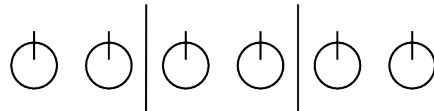


図 1.4

図 1.4 のようにリンゴが 6 個あり、それを 3 等分する各グループのリンゴの数を  $6 \div 3$  と書く。すなわち

**自然数の割り算の定義** 割り算とは  $A$  が  $M$  個あり、それを  $N$  等分する。各グループの  $A$  の数を  $M$  と  $N$  で表わすことである。その数を  $M \div N$  と書く。

明らかに割り算は掛け算の逆算になっている。すなわち 3 等分して 3 倍すれば、元に戻るし、3 倍して 3 等分すれば元に戻る。さて掛け算は掛ける数と掛けられる数を入れ替えても同じ数を表わした。だから  $(6 \div 3) \times 3 = 6$  なので  $3 \times (6 \div 3) = 6$  となる。すなわち 3 にどんな数を掛けたら 6 になるかの、そのどんな数も  $6 \div 3$  に等しい。リンゴ 6 個を 1 つの箱にリンゴ 3 個ずつ入れたときの箱の数は  $6 \div 3$  に等しいと言えるのである。図 1.3 にあるように 3 等分することは 3 段にならべたときの横の列の数 (今の場合 5) であり、3 個ずつの箱に分けることは縦の段 3 つを 1 つの箱とみなしてそれが横に何個並ぶかであり、ともに横の列の数を表わしている。このグループの数を表わす割り算を包含算といい、割り算の定義としてもよいようだが、掛け算の  $5 \times 3 = 3 \times 5$  を定理としているのでこれも定理だと考えることにしよう。

定理 1.2  $A$  が  $M$  個あり、それを  $N$  個ずつのグループに分けたときのグループの数 ( $A$  が  $N$  個の数) は  $M \div N$  に等しい。

## 1.7 演算における等式について

今から述べる等式というのは、どんな自然数でも成り立つ数の異なる表現のことである。 $(5 + 3) \times 4$  と  $5 \times 4 + 3 \times 4$  は同じ数を表わしている。この式の 5, 3, 4 というのはどんな数でも前者は後者に等しい。すなわち  $L, M, N$  がどんな自然数でも  $(L + M) \times N$  と  $L \times N + M \times N$  は同じ数を表わしている。同じ数を表わしていることを  $=$  の記号を使って

$$(L + M) \times N = L \times N + M \times N$$

と書く。数が等しいことを証明するには集まりの要素 (単位) が 1 対 1 対応することを示せばよい。我々は計算 (すなわち 10 進数に直す) するときこういう等式を使って速く処理しているわけである。例えば  $153 - 99$  を計算するとき、 $153 - (100 - 1)$  と  $153 - 100 + 1$  が等しいことを使って、これは 54 と等しいとしているわけである。又、 $12 \div 4 \times 3 \times 4 = 12 \times 3$  として 36 と素早く計算しているわけである。こういう等式が成り立



つ理由は数というのは要素（リンゴとか）の個性を考えないからである。そして足し算というのは順序がないからである。

## 1.8 足し算引き算についての等式

足し算の定義から明らかに  $4 + 3 = 3 + 4$  である。もともと合わせるという概念では、合わせる 2 つの集まりの役割は対称なのである。だからこれは等しいというより、書き方の問題で、どちらかを先に左から書くから 2 つの表現方法があるとうだけの話である。そして、

$$4 + 5 + 6 = 4 + 6 + 5 \quad (1.1)$$

である\*3。すなわち 4 と 5 を合わせた数と 6 を合わせるか、4 と 6 を合わせた数と 5 を合わせるかということである。足し算というのは 2 つの数を使って 1 つの数を作る。そして 3 つの数の内、2 つの組み合わせで数を作り、その数と残り 1 つの数との組み合わせで数を作るとき、その組み合わせの仕方はどれでも結果は同じだと言っているのである。これは図 1.5 のように合わせる前の者同士を対応させれば、1 対 1 対応が見つかることか

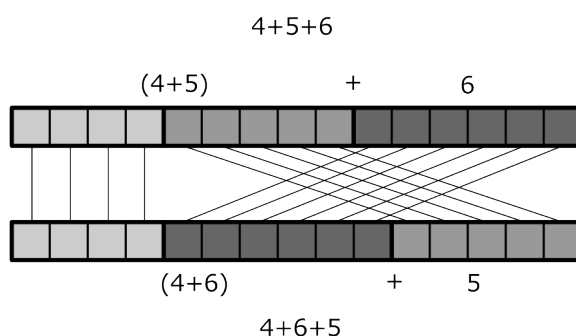


図 1.5

ら明らかであろう。リンゴを袋にいれるのに 4 個入れてから、5 個入れて、それから 6 個入れても 6 個入れてから、4 個入れて、それから 5 個入れても袋の中のリンゴの数は同じなのである。

又、明らかに  $10 - 3 - 2 = 10 - 2 - 3$  である。というのは数の対象となる要素、つまり単位には個性がなく図 1.6 のようにどこの単位から 3 個取り去ってもいいからである。だから引くという行為に順序は意味をなさないのである。

そして  $10 - 2 + 3 = 10 + 3 - 2$  である。これは引き算と足し算の順序を入れ替えてもいいということを言っているわけだが、2 個取り去るといのはどこから取り去ってもいいので  $10 + 3 - 2$  でも 2 個取り去るのは 10 の部分から取り去ればよいのである。だから  $10 - 2 + 3 = 10 + 3 - 2$  である。以上の例から次のことが言える

**定理 1.3** 足し算、引き算はともに順序は関係ない。

(形式的な証明)

\*3 演算は左から実行すると約束する。

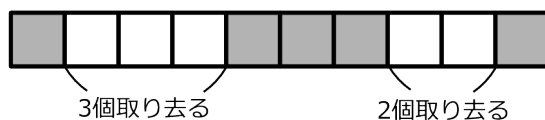


図 1.6

ここで、今まで述べたことを図を使わずに形式的に記号的に等式の証明を試みよう。私はあまりこういうやり方は好きではない。物事の本質が見えない感じがするからである。ただ整理するにはよい。この記号的証明にはもちろん物理的事実がすべて対応している。つまり式に対応する図 1.3～図 1.6 のようなリンゴやマスの図があるということである。

等式 1.1 (2 項の対称性)

$$M + N = N + M$$

【証明】 上で述べたとおり

等式 1.2 (組み合わせの自由)

$$(M + N) + L = M + (L + N)$$

【証明】 すでに述べたとおり

さて、この等式 1.1、等式 1.2 をもとに、すなわち足し算の順序は自由に入れ替えられるということをもとに、他の式を証明しよう。それと同じものを加えて同じになるなら元は等しいという性質である。これは

$$M + L = N + L$$

なら  $M = N$  であるという命題のことである。

等式 1.3 (引く項の対称性)

$$M - N - L = M - L - N$$

【証明】 左辺に  $L + N$  を加えると

$$M - N - L + (L + N)$$

は足し算に順序は関係ないので

$$(M - N - L + L) + N$$

となりこれは  $M$  に等しい。右辺に  $N + L$  を加えると同様に  $M$  になる。同じものを加えたら等しくなったということは元が等しかったということである。

等式 1.4 (足す項と引く項の入替)

$$M - N + L = M + L - N$$

【証明】左辺に  $N$  を加える

$$M - N + L + N$$

は足し算の順序を入れ替えられるのでこれは  $M + L$  に等しい。右辺に  $N$  を加えるとももちろん  $M + L$  に等しい。同じものを加えたら等しくなったということは元が等しかったということである。

(足し算のかっこはずし)

等式 1.5

$$M + (N + L) = M + N + L$$

【証明】等式 1.2 と同じである\*4。

等式 1.6

$$M + (N - L) = M + N - L$$

【証明】左辺に  $L$  を加えると

$$(M + (N - L)) + L$$

は足し算の順序は関係ないので

$$M + ((N - L) + L)$$

となり、これは  $M + N$  と等しい。右辺に  $L$  を加えても  $M + N$  と等しい。同じものを加えたら等しくなるということは元が等しかったということである。

等式 1.7

$$M - (N + L) = M - N - L$$

【証明】右辺に  $L + N$  を加えよう。

$$M - N - L + (L + N)$$

は足し算の順序は関係ないので

$$(M - N - L + L) + N$$

---

\*4 この式は書く必要がないのであるが、統一を保つために書いておいた。

となり、 $M$  になる。左辺に  $L + N$  を加えるとももちろん  $M$  になる。同じものを加えると同じものになるということは加える前から等しかったということである。

等式 1.8

$$M - (N - L) = M - N + L$$

【証明】 右辺に  $N - L$  を加えると

$$M - N + L + (N - L)$$

は等式 1.6 より

$$M - N + L + N - L$$

足し算の順序は入れ替えられるので  $N$  はキャンセルして、その結果  $L$  もキャンセルして、 $M$  になる。左辺に  $N - L$  を加えると加えるとももちろん  $M$  になる。同じものを加えると同じものになるということは加える前から等しかったということである。

尚ここで述べた形式的証明法は、足し算を掛け算に、引き算を割り算におきかえれば、次の掛け算割り算でも全く同様に使える。さらに分数での証明でも全く同様に使えるのである。根本にあるのは足し算（掛け算）には順序がない。同じものを足したら（掛けたら）同じものになるということは元は等しかったという命題だけである。

## 1.9 割り算・掛け算についての等式

まず統一を保つため定理 1.1 を式で書いておこう

等式 1.9 （2 項の対称性）

$$M \times N = N \times M$$

等式 1.10 （組み合わせの自由）

$$(M \times N) \times L = (M \times L) \times N$$

【証明】  $M = 2, N = 5, L = 3$  として説明しよう。この場合

$$(2 \times 5) \times 3 = (2 \times 3) \times 5$$

となる。これは 3 つの数の内 (今の場合 2,3,5) どの 2 つを組み合わせようと (今の場合左辺では 2 と 5、右辺では 2 と 3) 同じ数を表わすと主張しているのである。図 1.7 を見て考えよう。左辺は黒点が 2 個が 5 個が 3 個という意味だが、黒点が 2 個というのを定理 1.1 の A だと考えれば、これは (黒点が 2 個というの) が 3

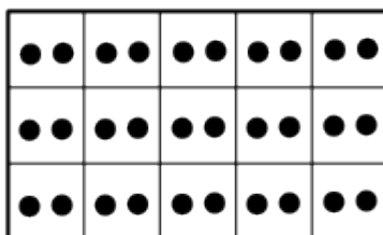


図 1.7

個が 5 個と等しい。これは右辺のことである。

**定理 1.4** 掛け算に順序は関係ない

さてここからの式の証明は足し算引き算の形式的証明と全く同じようにできる。足し算が掛け算に引き算が割り算に入れ替わっただけである。等式 1.9 と等式 1.10 (つまり定理 1.4) と同じ数を掛けたら同じ数になるなら元の数は等しいという自明な命題を使うだけである。ただ前にも述べたように形式的証明だけでは上っつらになってしまうので元の概念に戻った証明も幾つか入れた。

割り算同士の順序だが、これも順序は関係ない。すなわち

**等式 1.11** (割る項の対称性)

$$M \div N \div L = M \div L \div N$$

【証明】左辺に  $N \times L$  を掛ける。

$$(M \div N \div L) \times (N \times L)$$

定理 1.4 より掛け算の順序は関係ないので

$$(M \div N \div L \times L) \times N$$

となり、これは  $M$  と等しい。同様に右辺に  $N \times L$  を掛けると  $M$  に等しくなる。同じ数を掛けたら同じ数になるなら元の数は等しい。

【別証】例として  $32 \div 4 \div 2 = 32 \div 2 \div 4$  の場合を考えよう。図 1.8 のように 2 等分してから 4 等分しても 4 等分してから 2 等分しても等しい。

掛け算と割り算の順序だが、これも入れ替えられる。すなわち

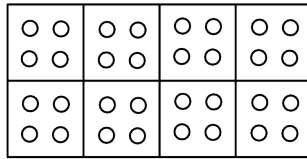


図 1.8

等式 1.12 (掛ける項と割る項の入替)

$$M \div N \times L = M \times L \div N$$

【証明】左辺に  $N$  を掛けると掛け算の順序は入れ替えられるので

$$M \div N \times N \times L$$

となって、これは  $M \times L$  と等しい。右辺に  $N$  を掛けると、これも  $M \times L$  と等しい。同じ数を掛けたら同じ数になるなら元の数も等しい。

【別証】 $24 \div 3 \times 4 = 24 \times 4 \div 3$  の場合を考えよう。図 1.9 のように 24 (なんでもいいが) を 3 等分しそれを 4 倍したのとまず 4 倍してから 3 等分したのでは面積が等しいと考えてもよい。だから、 $24 \div 3 \times 4$  は 24 を 4 倍したものの 3 等分になっているというわけである。

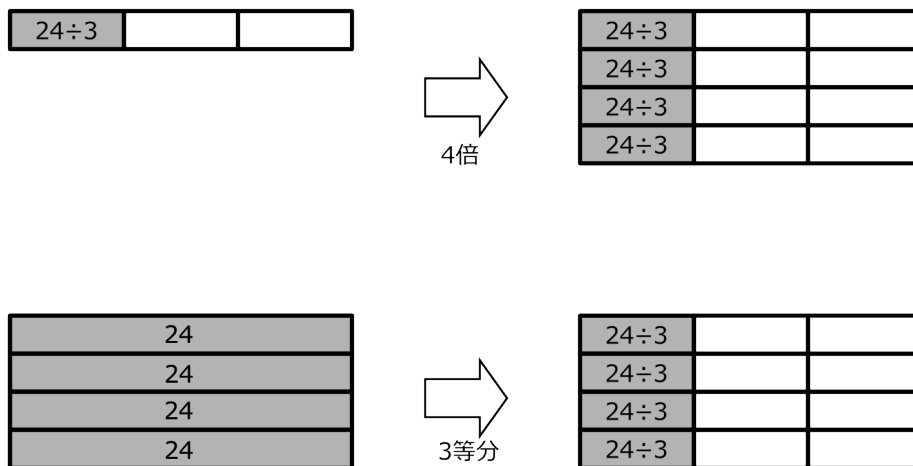


図 1.9

さて以上の議論から

定理 1.5 掛け算同士、割り算同士、掛け算と割り算の順序は入れ替えられる。

といえる。

【例】

$$64 \div 2 \times 4 \div 8 = 64 \div 8 \div 2 \times 4$$

(掛け算割り算のかっこはずし)

等式 1.13

$$M \times (N \times L) = M \times N \times L$$

【証明】 これはすでに等式 1.10 で証明済みである。

等式 1.14

$$M \times (N \div L) = M \times N \div L$$

【証明】 左辺に  $L$  を掛ける。

$$M \times (N \div L) \times L$$

掛け算の順序は自由なので

$$M \times (N \div L \times L)$$

となりこれは  $M \times N$  に等しい。右辺に  $L$  を掛けると明らかに  $M \times N$  に等しい。同じ数を掛けたら同じ数になるなら元の数は等しい。

等式 1.15

$$M \div (N \times L) = M \div N \div L$$

【証明】 右辺に  $N \times L$  を掛けると

$$M \div N \div L \times (N \times L)$$

掛け算の順序は入れかけられるので

$$(M \div N \div L \times N) \times L$$

掛け算、割り算の順序は自由に入れ替えられるので、 $N$  は消えて、

$$M \div L \times L$$

となり、 $M$  となる。左辺に  $N \times L$  を掛けると  $M$  になる。同じ数を掛けたら同じ数になるなら元の数は等しい。

等式 1.16

$$M \div (N \div L) = M \div N \times L$$

【証明】 右辺に  $N \div L$  を掛けると

$$M \div N \times L \times (N \div L)$$

等式 1.14 より、これは

$$M \div N \times L \times N \div L$$

に等しい。掛け算、割り算の順序は入れ替えられるのでこれは  $M$  に等しい。左辺に  $N \div L$  を掛けると  $M$  に等しい。同じ数を掛けたら同じ数になるなら元の数も等しい。

【別証】

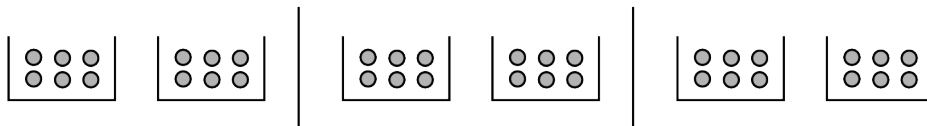


図 1.10

$$12 \div (6 \div 3) = 12 \div 6 \times 3 \quad (1.2)$$

の場合を証明しよう。これを証明するために、まず割る数と割られる数に同じ数を掛けても、割り算の示す数は等しいということを確認しよう。すなわち、

$$12 \div 2 = (12 \times 3) \div (2 \times 3)$$

となることを示そう。図 1.10 のようにボール 12 個を 2 つの箱に同じ数だけ入れたときの、1 つの箱のボールの数 ( $12 \div 2$ ) とボールが 3 倍 ( $12 \times 3$ ) されて箱が 3 倍 ( $2 \times 3$ ) されても 1 個の箱の中のボールの数は変わらないが、その数は

$$(12 \times 3) \div (2 \times 3)$$

と表わされるからである。だから

$$12 \div (6 \div 3)$$

の 12 と  $6 \div 3$  に 3 を掛けても同じ数となるのであるが、それは

$$(12 \times 3) \div 6$$

に等しい。そして掛け算と割り算の順序は入れ替えられるのでこれは  $12 \div 6 \times 3$  と等しい。

## 1.10 分配則

いわゆる分配則だが、最初の等式 1.17 を使って後の等式は証明される。



等式 1.17

$$(M + N) \times L = M \times L + N \times L$$

【証明】掛け算の順序は入れ替えられるので左辺を

$$L \times (M + N)$$

と書き変えよう。これは  $L$  個が  $M + N$  個ということであり右辺も  $L$  個が  $M$  個と  $N$  個であり明らかに等しいのである。

等式 1.18

$$(M - N) \times L = M \times L - N \times L$$

【証明】左辺に  $N \times L$  を加えた数は

$$(M - N) \times L + N \times L$$

は等式 1.17 より

$$((M - N) + N) \times L$$

と等しい。これは  $M \times L$  に等しい。右辺に  $N \times L$  を加えるともちろん  $M \times L$  に等しい。同じものを加えると同じものになるということは加える前から等しかったということである。

等式 1.19

$$(M + N) \div L = M \div L + N \div L$$

【証明】右辺に  $L$  を掛けた数

$$(M \div L + N \div L) \times L$$

は等式 1.17 より

$$M \div L \times L + N \div L \times L$$

に等しい。これは  $M + N$  に等しい。左辺に  $L$  を掛けると明らかに  $M + N$  に等しい。同じ数を掛けたら同じ数になるなら元の数に等しい。

等式 1.20

$$(M - N) \div L = M \div L - N \div L$$

【証明】右辺に  $L$  を掛けた数

$$(M \div L - N \div L) \times L$$

は等式 1.18 より

$$M \div L \times L - N \div L \times L$$

に等しい。これは  $M - N$  に等しい。左辺に  $L$  を掛けると明らかに  $M - N$  に等しい。同じ数を掛けたら同じ数になるなら元の数も等しい。

この章では、数をリングやボールやマスの集まりとして扱い、図を使いながらいろんな命題を証明した。いったいこれでいいのだろうか。ペアノの公理を使って、証明しなくてもいいのか。現代数学の教科書とでは書かれていることが大分違うが。などという疑問がわいてくるかもしれない。しかし、これでいいのである。数はリングの集まりと完全に同型なのである。リングで正しかったことはすべて別の集まりで正しいのである。おそらく歴史的には物質的な物の集まりが数のことであったのだろう。それが徐々に動作の回数（すなわち時間）や、そしてより抽象的な  $7^6$  の  $6$  のようなものにまで広がって言ったのであろう。これらはリングと同じ法則にしたがうと気付いたのであろう。こういうことは人間の言語の発展ではよくあることだと思う。平行線は直線が交わらないというのが元々の意味だが、交わらないということで議論が平行線などという使い方をする。

結局全ての演算は足し算から定義されている。そして足し算の可換性すなわち合わせるという概念には両者が対称であるということから来ている。両者が対称なのは 1 対 1 対応では要素に個性を認めないということから来ているのである。

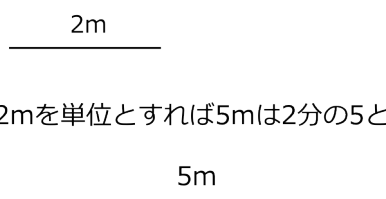
## 第 2 章

# 分数

### 2.1 序



図 2.1



2mを単位とすれば5mは2分の5と表わされる。

図 2.2

ある棒の長さの  $\frac{3}{5}$  とは、「ある棒の長さ」を 5 等分して、その 5 等分したものを 3 つ合わせたものという意味である (図 2.1)。この「ある棒の長さ」は普通「単位」と呼ばれている。分数というのは 2 つの連続量の関係を 2 つの自然数を使って表わすものである。例えば 2m と 5m は 2m を単位とすれば 5m は  $\frac{5}{2}$  と表わされる (図 2.2 と表 2.1 参照)。2m を 2 等分して 5 個合わせると 5m になるからである。連続量の例として・長さ・面積・体積・質量・速さ・加速度・力 等々がある。

単位	分数	表わされる量
2m	$\frac{5}{2}$	5m

表 2.1

## 2.2 連続量の性質

ここで分数概念の基礎である連続量の性質を列挙しよう。これらは決して完璧なものではないしいわんや完全な公理系でもなんでもない\*1。ここでは連続量の例図として長さを使っているが、以下に述べる連続量の性質は面積であろうが体積であろうが質量であろうが成り立つものである。

### 連続量の性質 1 等しいという概念がある

例えば長さという量では、2つの棒がピッタリ重なれば等しいといえる。すなわち片方の端を合わせて、もう一方の端が同じ位置にくれば、この2つの棒は等しい\*2と言えるのである(図2.3)。この等しいという概念によって我々は量の大きさの情報を人に伝えるのである。ある鉛筆の長さという量を相手に伝えるのにはそれと等しい長さの棒を示してやればよい。しかしこれがビルの高さのような大きな量になると、そんな長い棒を持ってくるのは不可能である。そこで小さな棒を示してそれを何等分して何倍したのと等しいというふうに情報を伝えるのである。これは自然数の場合、数が多くなると小石で数を示すのは大変なので1, 2, 3, 4という言葉を作って、それによって情報を伝えるのと似ている。

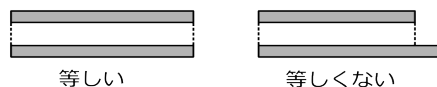


図 2.3

### 連続量の性質 2 A と B が等しく、B と C が等しければ A と C は等しい (図 2.4)・・・(量の分類)

この性質のおかげで物差しというものが役に立つのである。今の場合 B が物差しの役割をしている。又、これによって量を分類できるわけである。等しい長さのものに対して何か言葉を作ればよいわけである。ただそれが無限にあるので分数を使うのである。



図 2.4

### 連続量の性質 3 合わせるという概念がある。2つ以上の量を合わせて、異なる量を作ることができる。A、B、C をあわせて X ができたとすると A、B、C は X の部分であるという (図 2.5)。

\*1 完全な公理系とは、必要十分な公理系のことである。つまり、ある定理の集まりを証明するのに必要な公理をすべて含みかつ、余分な公理(他の公理から導けるもの)を含まないものである

\*2 長さが等しいというのはそれを部分に分解したときにその部分が等しいというのが正しいところだろう。曲線と直線はぴったり重なることがないが長さが等しいことはある。この場合の等しいの意味は部分に分解したとき、その部分が等しいという意味である。

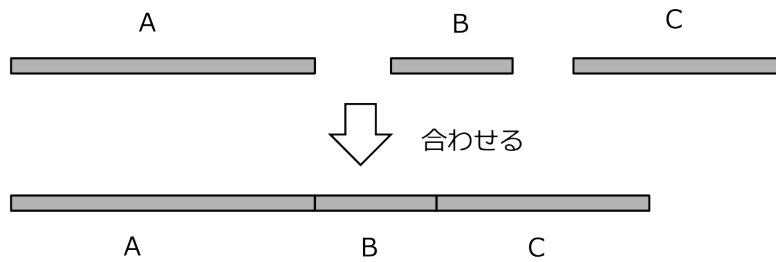


図 2.5

**連続量の性質 4** 合わせるのに順序はない。何を合わせたかだけが意味を持つ。

A と B を合わせて、それに C を合わせたものも、A と C を合わせて、それに B を合わせたものも同じだと言っているのである。

**連続量の性質 5** 部分が互いに等しければ、それを合わせた全体は等しい。……(量の分類)

例えば A と A' が等しく、B と B' が等しく、C と C' が等しければ A と B と C を合わせたものと A' と B' と C' を合わせたものは等しい\*3 (図 2.6)。

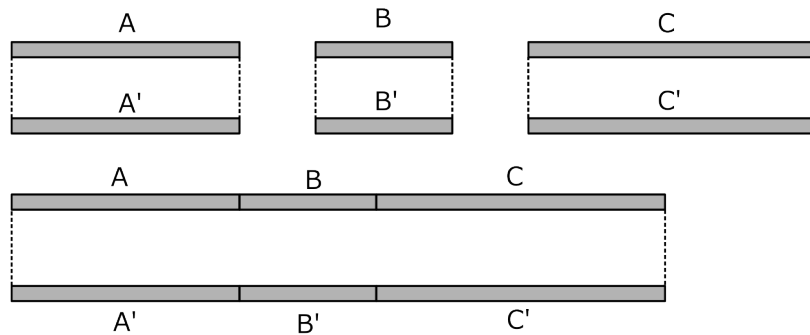


図 2.6

**連続量の性質 6** 全体が等しければ互いに等しい部分に分割できる。……(量の分類)

これは 5 の逆である。X と Y の量が等しければ  $A = A'$ 、 $B = B'$ 、 $C = C'$  となるように X は A、B、C と分割でき、Y は A'、B'、C' と分割できるという意味である。

\*3 A と A' が等しいのになぜ異なる名称を使うのはおかしいという気がするかもしれない。私もそう思う。ここでの A はある量をさしているのではなく、ある棒を指していると思ってもらいたい。つまり A と A' は異なる 2 本の棒とでも思ってもらいたい。言葉は習慣的が言い回しが多いのである。慣用句のようなものである。

連続量の性質 7 任意の量に分割可能である。

すなわち 2 つの量 A、B があったとすると、A は B と等しい部分とその残りに分割されるか (図 2.7 の 1) B が A に等しい部分とその残りに分割される (図 2.7 の 2)。これは量 A、B がどんな大きさでどちらかが成り立つ。



図 2.7

連続量の性質 8 A と B が等しいなら、A と B を同じ数で等分割すれば、その等分割されたものは等しい。・・・(量の分類)

例えば A を 3 等分したものを  $A_1$ 、B を 3 等分したものを  $B_1$  とすると、 $A_1$  と  $B_1$  は等しいということである\*4 (図 2.8)。

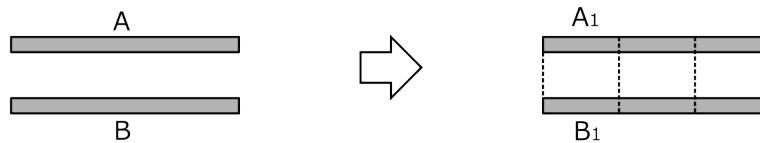


図 2.8

連続量の性質 9 引くというのは全体からある部分を取り去ることである (定義)。同じ量を引けばどの部分から取り去ろうと残りの量は等しい (図 2.9)。・・・(量の分類)

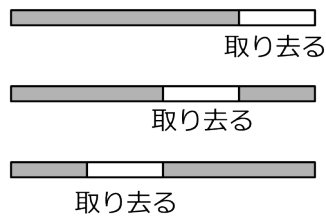


図 2.9 どこから取り去ろうと残りの量は同じ

\*4 実はこれは証明できる。まず A を 3 等分するとする。連続量の性質 6 により B をそれと互いに等しいように分割できる。A は 3 等分であり B はその 3 等分したのと等しく分割されるので性質 2 を考慮すれば B は 3 等分されたことになる。ただ別の 3 等分のしかたがありうるというのはこの公理系からは導けない。量の大きさについてさらに公理を加えなければならない。ただそうするといよいよ繁雑になってしまう。

連続量の性質 10 合わせるのも引くのも順序は関係ない

さて、10個の連続量の性質をあげたが、その中でいくつか「量の分類」という項目を書いた。これは量が同じなら、例えばこの棒とあの棒が同じ長さなら、量に関してはすべて同じ性質を持つという、皆が当たり前と思うことを書いているのである。これによって、量を3 mと分類したらあとは「あの3 m」を半分にし、「この3 mを半分にし」とか言う言い方は不要になり、どの棒の3 mを半分にしても量に関しては同じ性質をもち1.5 mになるのである。第1章では、離散量ではこのことは当然のこととして書かなかった。

## 2.3 連続量についての定理

この節で連続量について幾つかの定理を述べるが、説明の簡潔さのためにいくつか記号を導入しよう。

**記号の定義** 連続量はアルファベットの太字で  $\mathbf{A}$  とかく。量  $\mathbf{A}$  と  $\mathbf{B}$  を合わせた量のことを  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$  と書く。量  $\mathbf{A}$  から  $\mathbf{B}$  を取り去った量のことを  $\mathbf{A} - \mathbf{B}$  と書く。量  $\mathbf{A}$  を自然数  $N$  倍した量を  $\mathbf{A} \times N$  と書く。自然数  $N$  等分した量を  $\mathbf{A} \div N$  と書く。 $\mathbf{A}$  と  $\mathbf{B}$  の量が等しいことを  $\mathbf{A} = \mathbf{B}$  と書く。

**定理 2.1**

$$(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \cdots + \mathbf{A}_M) \times N = (\mathbf{A}_1 \times N) + (\mathbf{A}_2 \times N) + \cdots + (\mathbf{A}_M \times N)$$

が成り立つ。

【証明】  $M = 3$ 、 $N = 4$  として証明しよう。この場合式は

$$(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3) \times 4 = (\mathbf{A}_1 \times 4) + (\mathbf{A}_2 \times 4) + (\mathbf{A}_3 \times 4)$$

となる。左辺は  $\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3$  という量が4つということだが、どの4つも  $\mathbf{A}_1$ 、 $\mathbf{A}_2$ 、 $\mathbf{A}_3$  から構成される。

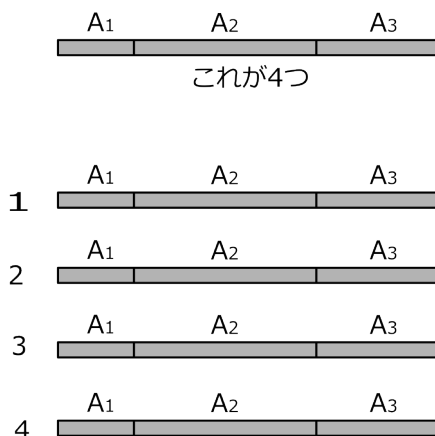


図 2.10

そしてそれが4つで、連続量の性質 4 より合わせるのに順序はないから、 $\mathbf{A}_1$  が4つ、 $\mathbf{A}_2$  が4つ  $\mathbf{A}_3$  が4つから構成される。それはまさに右辺の意味である。

定理 2.2

$$(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \cdots + \mathbf{A}_M) \div N = (\mathbf{A}_1 \div N) + (\mathbf{A}_2 \div N) + \cdots + (\mathbf{A}_M \div N)$$

が成り立つ。

【証明】  $M = 3, N = 4$  として証明しよう。この場合式は

$$(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3) \div 4 = (\mathbf{A}_1 \div 4) + (\mathbf{A}_2 \div 4) + (\mathbf{A}_3 \div 4)$$

となる。右辺を 4 倍すれば定理 2.1 より

$$((\mathbf{A}_1 \div 4) \times 4) + ((\mathbf{A}_2 \div 4) \times 4) + ((\mathbf{A}_3 \div 4) \times 4)$$

となる。そして

$$\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3$$

となる。左辺を 4 倍すればもちろん

$$\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3$$

となる。4 倍すれば共に同じ量になるなら、4 倍する前の量は等しい\*5。

等式 2.1 連続量を自然数倍するのに順序は関係ない

$$\mathbf{A} \times M \times N = \mathbf{A} \times N \times M$$

【証明】 例としてある量を 3 倍した後に 4 倍する場合と、4 倍した後 3 倍する場合を考えよう。これは自然数

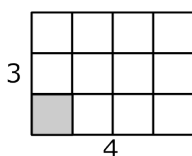


図 2.11

の  $3 \times 4 = 4 \times 3$  を証明したのと同様に図 2.11 のように考えればよい。

等式 2.2 連続量を自然数で割るのに順序は関係ない

$$\mathbf{A} \div M \div N = \mathbf{A} \div N \div M = \mathbf{A} \div (M \times N)$$

【証明】 例としてある量を 3 等分した後に 4 等分する場合と、4 等分した後 3 等分する場合を考えよう。図

\*5 これは述べていないが量の性質として自明なものとする。これがなければ量の性質として異なるものになってしまう。基本的に同じ量は同じ操作で同じ量に移る。



2.11 のようにマス全部を  $\mathbf{A}$  と考えよう。4 等分した後 3 等分したのも 3 等分したものを 4 等分したのも、 $4 \times 3$  等分したものになっているからである。

等式 2.3 連続量に自然数を掛けるのと自然数で割るのに順序は関係ない

$$\mathbf{A} \times M \div N = \mathbf{A} \div N \times M$$

【証明】 例として 3 倍して 4 等分する場合と 4 等分して 3 倍する場合を考えよう。定理 2.2 で  $M = 3$ 、 $N = 4$  として  $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_3 = \mathbf{A}$  とすれば、この等式になる。

以上等式 2.1、等式 2.2、等式 2.3 より

定理 2.3 連続量を自然数倍したり、自然数で割るのに順序は関係ない

と言える。

## 2.4 分数の定義、単位の定義、表わされる量の定義

この章では分数をアルファベットの小文字で表わす。又、この章で数と言えば分数のこととする。

**分数の定義** 分数とはある連続量を使って、別の連続量を表わすもののことである。表わし方は  $M, N$  を自然数として、「ある連続量の  $\frac{N}{M}$ 」という言いかたで表わす。その意味は「ある連続量」を  $M$  等分したものを  $N$  倍した量という意味である。 $\frac{N}{M}$  を分数と言う。「ある連続量」は数  $\frac{N}{M}$  の単位と言う。「ある連続量の  $\frac{N}{M}$ 」は単位と数によって「表わされる量」と呼ぼう。

この単位、分数\*6、表わされる量のうち 2 つが決まればもう一つが決まるわけである。

## 2.5 足し算

分数の足し算も自然数の足し算と考え方は同じである。ただ扱う量が連続量になっているかどうかの違いだけである。定義を書くと

**分数の足し算の定義** 2 つの連続量  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  を合わせて  $\mathbf{C}$  を作る。単位量  $\mathbf{T}$  によって、量  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  は分数  $a, b$  で表わされるとする。量  $\mathbf{C}$  を単位量  $\mathbf{T}$  を使って表わした数  $c$  を  $a$  と  $b$  で表わすことを足し算という。 $c$  を  $a + b$  と書く (表 2.2)。

例えば図 2.12 のように単位をとり、量  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  は  $\frac{3}{2}, \frac{5}{2}$  と表わされ、 $\frac{3}{2} + \frac{5}{2}$  というのはこの単位を使って量  $\mathbf{A}$

\*6 上の定義で  $\frac{5}{1}$  とは 1 等分したものが 5 個ということだが、1 等分などと言う日本語はない。それで、これは単位量が 5 個という意味だとする。それなら  $\frac{5}{1}$  などという書き方はやめて 5 個とかいたほうがいだろうと思うかもしれない。全くその通りだが、これは代数演算のためなのである。 $\frac{M}{N-L}$  が  $M - N = 1$  のときも意味を持たせたいわけである。また、こう決めることによって自然数は分数に含まれることになる。

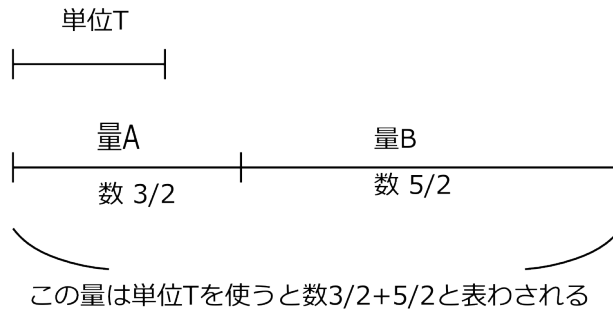


図 2.12

単位	表わされる量	分数
<b>T</b>	<b>A、B</b>	$a、b$
<b>T</b>	<b>A と B と合わせたもの</b>	$a + b$

表 2.2

と量 **B** を合わせたものを表わしているわけである\*7。

## 2.6 引き算

分数の引き算の定義 連続量 **A** から **B** を取り去った量を **C** とする。単位量 **T** によって **A**、**B** は分数  $a、b$  で表わされるとする。量 **C** を単位量 **T** を使って表わした数を  $c$  を  $a$  と  $b$  で表わすことを引き算という。  $c$  を  $a - b$  と書く。

## 2.7 掛け算

掛け算も自然数の場合と考え方は同じである。自然数の掛け算を振り返って見よう。みかんが3個あり、そのみかん3個を単位として、それが5個あったとき、元の単位であるみかんの数を3と5で表わすことであった。分数の場合  $3/5 \times 2/7$  とは何を意味しているかという、単位量の  $\frac{3}{5}$  で表わされる量の  $\frac{2}{7}$  で表わされる量を、その単位で表わした数のことである。これが  $3/5 \times 2/7$  の意味である (図 2.13)。要するに  $3/5 \times 2/7$  とは単位量を5等分したものを3つ合わせて、それを7等分して2つ合わせた量を表わしているわけである。

\*7 分数の定義を  $\frac{N}{M}$  という形にした。すると  $\frac{3}{2} + \frac{5}{2}$  はその形になっておらず分数ではないということになってしまう。まったくその通りである。分数の定義を単に「分数とはある連続量を使って、別の連続量を表わすものことである。」とすればよかったのかもしれない。そうすると説明がどうしても抽象的になってしまう。それで  $\frac{N}{M}$  の形を分数の定義にしたのである。ただ  $\frac{3}{2} + \frac{5}{2}$  は  $\frac{8}{2}$  のことだし、 $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$  というように  $\frac{N}{M}$  の形には変えられるのである。

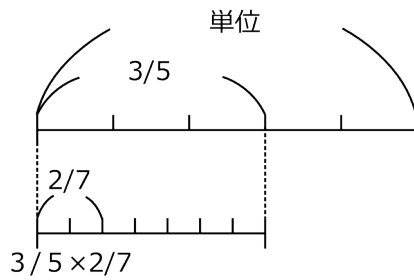


図 2.13

記号	意味
$\times \frac{3}{5}$	5等分して3倍
$\div \frac{3}{5}$	3等分して5倍。 $\times \frac{5}{3}$ と同じこと
$\times \frac{3}{5} \div \frac{3}{5}$	5等分して3倍して3等分して5倍。結果元に戻る
$\div \frac{3}{5} \times \frac{3}{5}$	3等分して5倍して5等分して3倍。結果元に戻る

表 2.3

**分数の掛け算の定義** 単位量  $\mathbf{T}$ 、数  $a$  で表わされる量を  $\mathbf{R}$  とする。 $\mathbf{R}$  を単位量として数  $b$  で表わされる量を単位量  $\mathbf{T}$  で表わした数を  $r$  とする。 $r$  を  $a$  と  $b$  で表わすことを掛け算という。 $r$  を  $a \times b$  と書く。

## 2.8 割り算

自然数の割り算は量を等分するということであつた。3で割るなら3等分するということであつた。等分するというのは日本語として使われている。分数の割り算の場合、このように簡潔に表現できる言葉がない。おそらく分数の割り算など使うことがなかったからであろう。自然数の場合、割り算は掛け算の操作を元に戻す操作であつた。つまり3倍して3等分すれば元に戻る。分数の場合の割り算も同様に定義する。つまり掛け算の効果を元に戻すということである。例えば  $\times \frac{3}{5}$  というのは、ある量を5等分して3倍することであつた。だからそれを打ち消すには、3等分して5倍することである。それを  $\div \frac{3}{5}$  と書くわけである。そして  $\times \frac{3}{5} \div \frac{3}{5}$  という操作で元に戻ることは定義だが、 $\div \frac{3}{5} \times \frac{3}{5}$  という操作でも元に戻る。なぜなら3等分して5倍して5等分して3倍するという意味だからである(表2.3)。

**分数の割り算の定義** 単位量  $\mathbf{T}$ 、数  $a$  で表わされる量  $\mathbf{R}$  とする。 $\mathbf{R}$  を  $N$  等分して  $M$  倍した量を  $\mathbf{R}'$  とする。 $\mathbf{R}'$  を  $\mathbf{T}$  で表わした数  $c$  を  $a$  と  $\frac{N}{M}$  を使って表わすことを割り算という。その数  $c$  を  $a \div \frac{N}{M}$  と書く。

定義から明らかに分数で割ることは分母と分子を入れ替えて掛けると同じことである。すなわち  $\div \frac{M}{N}$  は  $\times \frac{N}{M}$  と同じことである\*<sup>8</sup>。そして上で述べたように以下の定理が成り立つ。

\*<sup>8</sup> 割り算は不要なのではないかという疑問がわくかもしれない。これも代数のためである。

### 定理 2.4

$$a \times b \div b = a \qquad a \div b \times b = a \quad (\text{割り算の定義}) \qquad (2.1)$$

## 2.9 補足

分数の割り算の定義は上の記述でいいと思うが、もう少し抽象的に逆算として定義してみよう。この考え方は足し算に対する引き算や、複素数での演算にも適用できる。

**割り算の定義 2**  $a \div b$  という数は  $b$  を掛けたら  $a$  になる数である。

その関係を図 2.14 に示した。さて、 $(a \times b) \div b$  とはどんな数かという、これは  $b$  を掛けると  $a \times b$  になる数だということなのだから、それは明らかに  $a$  なのである。だから

$$(a \times b) \div b = a$$

が成り立つ。言葉だけでは何かしっくりしないものがあるが、図 2.14 のように考えれば明快になるのではないだろうか\*9。掛け算と割り算は互いに矢印が逆の操作なのである。そしてこれは足し算、引き算にも言える関係である。



図 2.14

## 2.10 分数での等式

**定理 2.5** 足し算、引き算に順序は関係ない。

【証明】連続量の性質 10 で述べたように連続量を合わせるのにも取り去るにも順序は関係ないからである。

**等式 2.4**

$$\frac{N}{M} + \frac{L}{M} = \frac{N+L}{M}$$

【証明】  $\frac{N}{M}$  とは  $M$  等分したものが  $N$  個、 $\frac{L}{M}$  とは  $M$  等分したものが  $L$  個それを合わせれば  $M$  等分したものが  $N+L$  個になる (図 2.15)。それが右辺の意味である。

\*9 われわれは理解するとは何か経験を脳で思い出して理解というものを得るものである。言葉だけから経験を想起するにはなかなか時間がかかるものである。図は経験を呼び起こすのに良い手段である。

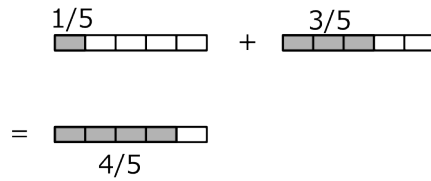


図 2.15

等式 2.5 分母と分子に同じ自然数を掛けても同じ数を表わす。

$$\frac{N \times L}{M \times L} = \frac{N}{M}$$

【証明】 左辺は

$$\mathbf{T} \div (M \times L) \times (N \times L)$$

という意味だが、これは等式 2.2 より

$$\mathbf{T} \div M \div L \times N \times L$$

となる\*10。等式 2.3 より掛け算、割り算の順序は入れ替えられるので

$$\mathbf{T} \div M \times N$$

となるこれは右辺のことである\*11。

等式 2.6

$$\frac{N_1}{M_1} + \frac{N_2}{M_2} = \frac{N_1 \times M_2 + N_2 \times M_1}{M_1 \times M_2}$$

【証明】 等式 2.4 と等式 2.5 を組み合わせれば直ちに導ける。等式 2.5 より分母と分子に同じ数を掛けても同じ数を表わすので  $\frac{N_1}{M_1}$  の分母と分子に  $M_2$  を掛け、 $\frac{N_2}{M_2}$  の分母と分子に  $M_1$  を掛ける。これで分母が同じになる。すなわち

$$\frac{N_1}{M_1} + \frac{N_2}{M_2} = \frac{N_1 \times M_2}{M_1 \times M_2} + \frac{N_2 \times M_1}{M_2 \times M_1}$$

等式 2.4 よりこれは

$$\frac{N_1 \times M_2 + N_2 \times M_1}{M_1 \times M_2}$$

となる。

【例】

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{7} = \frac{2 \times 7 + 5 \times 3}{3 \times 7}$$

\*10  $\mathbf{T} \times (N \times M) = \mathbf{T} \times N \times M$  という等式を使った。これは明らかであろう

\*11 同じ量を表わす分数は等しいということは暗黙の了解としている

等式 2.7

$$\frac{N_1}{M_1} \times \frac{N_2}{M_2} = \frac{N_1 \times N_2}{M_1 \times M_2}$$

【例】

$$\frac{2}{3} \times \frac{5}{7} = \frac{2 \times 5}{3 \times 7}$$

【証明】 定理 2.3 より掛けるのも割るのも順序は関係ない。左辺の意味していることは単位量を  $M_1$  等分して  $N_1$  倍してそれを  $M_2$  等分して  $N_2$  倍することである。これは  $M_1$  等分して  $M_2$  等分して  $N_1$  倍して  $N_2$  倍したものと等しい。記号で表せば

$$\mathbf{T} \div M_1 \times N_1 \div M_2 \times N_2 = \mathbf{T} \div M_1 \div M_2 \times N_1 \times N_2$$

そして左辺は等式 2.2 より

$$\mathbf{T} \div (M_1 \times M_2) \times (N_1 \times N_2)$$

である。これが右辺の意味であった。

等式 2.8 以下の等式が成り立つ。

$$M \div N = \frac{M}{N}$$

【例】

$$3 \div 5 = \frac{3}{5}$$

【証明】 等式 2.3 より掛け算と割り算は順序を入れ替えられるからである\*12。左辺は

$$\mathbf{T} \times M \div N$$

という意味だが、等式 2.3 より掛け算と割り算は順序を入れ替えられるので、これは

$$\mathbf{T} \div N \times M$$

に等しい。そしてこれが右辺の意味であった。

等式 2.9 分数の掛け算、割り算では分子は掛け算の分子と割り算の分母を掛けたもの、分母は掛け算の分母と割り算の分子を掛けたものと等しい。例えば

$$\frac{N_1}{M_1} \times \frac{N_2}{M_2} \div \frac{N_3}{M_3} = \frac{N_1 \times N_2 \times M_3}{M_1 \times M_2 \times N_3}$$

【証明】 分数で割ることは分母と分子を入れ替えて掛けるという意味だったからである。この結果、分数の掛け算、割り算の順序は結果に影響しないということがわかる。すなわち

\*12  $\frac{N}{M}$  の定義をこれにしてもいいわけである。ただ意味はわかりづらい。

定理 2.6 掛け算同士、割り算同士、掛け算と割り算の順序は入れ替えられる。すなわち何を掛けたか、何で割ったかだけが意味を持つ。

$$a \times b = b \times a$$

$$a \div b \div c = a \div c \div b$$

$$a \times b \div c = a \div c \times b$$

等式 2.10 分配則が成り立つ

$$(a + b) \times c = a \times c + b \times c$$

【証明】 量についての分配則が成り立つからである。 $a = \frac{N}{M}, b = \frac{L}{K}, c = \frac{I}{H}$  としよう。この記号のもとで左辺は

$$(\mathbf{T} \div M \times N + \mathbf{T} \div K \times L) \div H \times I$$

という意味である。すると量についての分配則の定理 2.1、定理 2.2 から、

$$(\mathbf{T} \div M \times N \div H \times I + \mathbf{T} \div K \times L \div H \times I)$$

と等しい。これが右辺の意味であった。

## 2.11 分数の等式のまとめ

さて今まで分数の等式をいくつか証明したのだが、この節で包括的に書こうと思う。これは自然数での等式 1.1 から等式 1.20 と全く同じであり、単に文字  $M, N, L$  が分数  $a, b, c$  になっただけである。証明も自然数のときとまったく同様である。証明に使うのは足し算に関しては式 (2.2) と式 (2.3)<sup>\*13</sup> だけである。つまり足し算には順序は関係ないということと同じものを足して同じになるなら元は等しいという事実である。証明は自然数のときとまったく同様なので省略する。

### 2.11.1 足し算・引き算

(足し算引き算の順序)

$$a + b = b + a \tag{2.2}$$

$$(a + b) + c = a + (b + c) \tag{2.3}$$

$$a - b - c = a - c - b \tag{2.4}$$

$$a - b + c = a + c - b \tag{2.5}$$

<sup>\*13</sup> 式と等式は違うので注意。式は式の右にある番号である。

(足し算のかっこはずし)

$$a + (b - c) = a + b - c \quad (2.6)$$

$$a - (b + c) = a - b - c \quad (2.7)$$

$$a - (b - c) = a - b + c \quad (2.8)$$

### 2.11.2 掛け算・割り算

掛け算割り算の証明も自然数のときと同様である。証明に使うのは式 (2.9) と式 (2.10) に示す掛け算の順序が関係ないこと。これはすでに定理 2.6 として証明済みである。それと同じものを掛けて同じになるなら元は等しかったということである。

(割り算・掛け算の順序)

$$a \times b = b \times a \quad (2.9)$$

$$(a \times b) \times c = a \times c \times b \quad (2.10)$$

$$a \div b \div c = a \div c \div b \quad (2.11)$$

$$a \div b \times c = a \times c \div b \quad (2.12)$$

(掛け算割り算のかっこはずし)

$$a \times (b \times c) = a \times b \times c \quad (2.13)$$

$$a \times (b \div c) = a \times b \div c \quad (2.14)$$

$$a \div (b \times c) = a \div b \div c \quad (2.15)$$

$$a \div (b \div c) = a \div b \times c \quad (2.16)$$

### 2.11.3 分配則

分配則の証明も自然数のときと同じである。証明に使うのは式 (2.17) である。これは等式 2.10 で証明済みである。

(分配則)

$$(a + b) \times c = a \times c + b \times c \quad (2.17)$$

$$(a - b) \times c = a \times c - b \times c \quad (2.18)$$

$$(a + b) \div c = a \div c + b \div c \quad (2.19)$$

$$(a - b) \div c = a \div c - b \div c \quad (2.20)$$

## 2.12 分数概念の応用 指数

分数で表わせるものというのは連続量である。連続量の性質についてはすでに何度も述べた。さて、今までは長さや面積を量と考え分数で表わしてきたが、ここでは指数というものが分数で表わせることを示そう。指数とは  $10^{2/3}$  のような数のことである。 $10^{2/3}$  とは 3 乗したら 10 になる数を 2 乗した数のことである。なぜそれが  $2/3$  というような分数で表わしているのか、その理由を説明しよう。



$10^{1/3}$  というのは  $a \times a \times a = 10$  となる  $a$  のことである。この  $\times$  という記号を合わせるだけと考えれば、 $a$  というものは 10 を 3 つに等分割したものと考えられる。そして、この  $a$  も例えば 4 等分にできる。すなわち  $b \times b \times b \times b = a$  となるような  $b$  があるわけである。だから掛け算を足し算だと考えれば何等分にも等分割ができるわけである。今までの用語を使えば 10 が単位量、 $10^{2/3}$  が表わされる量、 $2/3$  がその数である。そして、この指数というものは連続量の概念をすべてみたしているのである。掛け算の入れ替えが可能なのは、今の場合足し算の入れ替えが可能なことに対応している。さて、

$$10^{\frac{2}{3}} \times 10^{\frac{3}{4}}$$

を考えてみよう。これは  $10^{2/3}$  という量と  $10^{3/4}$  という量を合わせているわけである。10 という連続量を 3 等分したもの（3 回掛けたら 10 になる数）が 2 個（2 回掛ける）と 10 を 4 等分したものが 3 個を合わせているわけである。

$(10^{2/3})^{5/4}$  を考えてみよう。 $10^{2/3}$  というのを単位として、その  $5/4$  であり、それを 10 を単位として表わした数は正に  $2/3 \times 5/4$  である。少し奇妙な感じがするなら、今までの分数での説明がそのまま、この指数にも適用できることを見ればよい。例えば分母と分子に同じ数を掛けても、同じ数を表わすということを見よう。それは量  $10^{2/3}$  が  $10^{\frac{2 \times 4}{3 \times 4}}$  と等しいということである。

$$\underbrace{A \times A \times A}_{\frac{2}{3}} = 10$$

の A をさらに 4 等分して（図 2.16）

$$\underbrace{(B \times B \times B \times B) \times (B \times B \times B \times B)}_{\frac{2 \times 4}{3 \times 4}} \times (B \times B \times B \times B) = 10$$

としよう。B というのは  $10^{\frac{1}{3 \times 4}}$  であり、それが  $4 \times 2$  個あるわけだから  $10^{\frac{2 \times 4}{3 \times 4}}$  というわけである。振り返っ

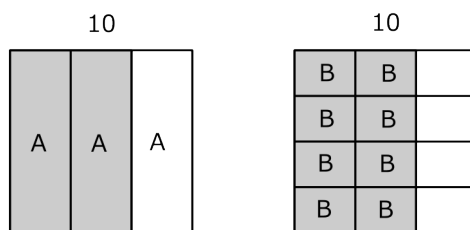


図 2.16

て見ると分数というのは 2 つの量の関係を表わすものであった。そして量というものは長さなり面積なりという物理的なものであった。ところが量というものの本質を取り出せば、その量の関係を表わす数、それ自身も量として扱えるというのがこの節の主張であり、指数に分数演算が適用できる理由であった。そして合わせるということ物理的なものから離れて、掛け算で置き換えて考えてもよいということであった。ついでに言うが、10 を単位量として、通常の足し算をそのまま足し算と考えても分数は表わせるのである。これは、いつも使っていることであり、あまり面白い例ではなかろう。2+3 は  $10 \times (2 + 3)$  の意味であり、 $2 \times 3$  は  $10 \times (2 \times 3)$  の意味と言うだけである。このように数自身も量として扱えることから、量と数をあまり区別せずに使われているのかもしれない。

## 第3章

# 正と負の数

### 3.1 正と負の数の概念

負の数というのは日常生活では使うことがない。我々は3個減ったことを(-3)個増えたとは言わないだろう。負の数を使う理由は代数演算のためである。負の数を使うことによって場合分けをしなくてすむようになる。それが負の数を使う理由である。例えば  $a$  と  $b$  が共に正の数とすると

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

という公式がある。しかし  $b$  に負の数もありうるとすれば、この2つの公式は

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

という1つの公式になる。文字に負の数を認めなければ、1つの文字について2通りの式が必要になり、 $(a + b + c)^2$  というように文字を3つ使えば  $2^3$  個の公式が必要になってしまうのである。これをすっきり1つにするのが負の数を導入する理由である。

さて、これから正と負の数の概念を説明しよう。

**変化量の定義** 向きと量をもったものを考えよう。向きには2種類あり、それをとりあえず東、西と呼ぼう。この2つの向きは下記の合わせるということの意味をもつ。このような向きと量を持ったものを変化量と呼ぶことにする。

**合わせるの定義** 2つの変化量を合わせるとは以下のこととする、

- (1) 同じ向き同士の変化量を合わせた結果は向きはそのままで量は合わせる。
- (2) 異なる向き同士の変化量を合わせると向きは多いほうの量を持った向きになり、量は大きい量から小さい量を取り去った量になる。

【例】 向きが東で量が5mである変化量と向きが東で量が3mである変化量を合わせると向きが東で量は8mになる。

【例】 向きが東で量が5mである変化量と向きが西で量が3mである変化量を合わせると向きは東で量は2m

になる。

今後、変化量は太字で表わすことにする\*1。

**正と負の数の定義** 変化量 **T** と **R** があるとする。正と負の数は、この2つの変化量の関係を表わす数である。**T** と **R** が同じ向きか異なる向きかという情報。それと **T** のただの量を使って **R** のただの量を表わす数 (今までの分数のこと) の情報。その2つの情報を表わすのが正負の数である。一般に単位 **T** と変化量 **R** が同じ向きなら **T** を使って **R** を表わす数は**正の数**と言われ、異なる時は**負の数**と言われる。

正の数を表わすには普通、量を表わす数だけを書く。ときおり + の記号を前に付ける。負の数を表わすときは量を表わす数の前に - 記号を書く。引き算と同じ記号を使うわけである。このことは後で詳述しよう。いままではかなり抽象的な話に終始したので具体例を見よう。今、東西に伸びる道を東、西へ移動する量を変化量とみなしてみよう。単位 **T** を東へ2m としよう変化量 **R** が東へ8m なら、それを表わす数は正の4である。もし **R** が西へ8m なら負の4である。今後、正負の数をギリシャ文字で表わすことにする。

## 3.2 足し算

足し算は変化量を合わせることである。

**正負の数の足し算の定義** 単位 **T** と数  $\alpha$  で表わされる変化量と、単位 **T** と数  $\beta$  で表わされる変化量を合わせ、その新たにできた変化量を単位 **T** で表わした数を  $\gamma$  とする。足し算とはその  $\gamma$  を  $\alpha$  と  $\beta$  で表わすことであり  $\alpha + \beta$  と書く。

## 3.3 引き算

引き算は足し算の逆算として定義しよう。

**正負の数の引き算の定義** 単位 **T** と数  $\alpha$  で表わされる変化量を **A**、単位 **T** と数  $\beta$  で表わされる変化量 **B** とする。変化量 **B** の向きを、もう一方の向きにし (いわゆる逆向きにし)、それを変化量 **A** と合わせた変化量を単位 **T** で表わした数を  $\gamma$  とする。引き算とはその  $\gamma$  を  $\alpha$  と  $\beta$  で表わすことである。

$\gamma$  は  $\alpha - \beta$  と書き、引き算は負の数と同じ記号を使う習慣になっている。これはよくないことだ。実際のところは引き算というのは不要なのである。引き算の定義から明らかのように  $\alpha - \beta$  とは  $\beta$  の正負を逆転して足しているわけである。

## 3.4 逆数と逆演算子と負数の記号

正と負の数、引き算の記号を考えるために、**逆数と逆演算子**という概念を導入しよう。逆数は高校までの数学で明確に述べられていないが、暗に使っているのである。

\*1 変化量をベクトルのように太字で書くかということ、ここでいう変化量は純粋数学の1次元のベクトルの公理を全て満たしているからである。

逆数の定義  $\alpha$  が  $\beta$  の逆数であるとは、量を表わす部分が同じで正負が異なる数であることである。

例えば 4 の逆数は  $-4$  であり  $-4$  の逆数は 4 である。

逆演算子の定義 逆演算子とはある数にこれを作用させると逆数になるという演算子である。

さてこの引く、逆演算子、負の数という 3 つの異なる概念を簡潔に表わす記号法を考えてみたい。数  $\alpha$  に逆演算子をさようさせた数を  $\text{逆} \cdot \alpha$  と書いてみよう。明らかに  $\text{逆} \cdot (\text{逆} \cdot \alpha) = \alpha$  である。すなわち

逆演算子を偶数回作用させると効果はなくなり、奇数回なら 1 回作用させたことと同じになる。

さて正負の数を表わす記号法だが、東 5、西 5 というのももちろんいいのだが、一方の向きを記号なしとしてみよう。例えば東向きの場合は単に量を表わす部分だけ書く。つまり

5

と書いたら東の 5 という意味とする。そうするともう一方の向きはそれの逆数になっているので単に

逆・5

と書けばよいことになる。つまり

正負の数の向きを表わす記号は一方を記号なしもう一方を逆・(量を表わす数) とすればよい。例えば正の数を記号なしで 5 とすれば負の数は逆・5 となる。

さて引き算だが 5 引く 3 というのは定義から  $5 + (\text{逆} \cdot 3)$  ということであつた。そこで数と数の間に逆演算子があるときは + 記号は省略する。するとこの式は  $5 \text{逆} \cdot 3$  と簡潔にかけられる。では 5 から (逆・3) を引く場合はどうか。これは定義より  $5 + (\text{逆} \cdot (\text{逆} \cdot 3))$  ということである。この場合 + 記号を省略すると、逆・逆は書かないから数の間に何も書かれなくなって  $53$  となってしまう。だから数の間に逆演算子記号がない場合は + 記号は省略しないと約束しよう。同様に  $\alpha$  から  $\text{逆} \cdot \beta$  を引く場合も  $\alpha + (\text{逆} \cdot (\text{逆} \cdot \beta))$  となつて、+ を省略すると  $\alpha\beta$  となってしまう。だからこの場合も + は省略しない。以上まとめると

数、又は文字の間に逆演算子があるときは + 記号は省略する。

と決めていいことになる。

あとは慣用の記号に直そう。正負の数のうち記号なしはどちらでもいいので慣例に従って、正の数の方を記号なしとする\*2。そして逆演算子の (逆・) を - 記号で置き換える。これで慣用の記号と全く同じになる。すなわち (-) 記号は逆演算子なのである。

### 3.5 掛け算

正負の数の掛け算も量のみの方の掛け算と本質は同じである。だから同じ掛け算という言葉が使われるのである。

\*2 実際のところは足し算に関しては正負の役割は全く対称であり一方を正、もう一方を負とよんでいるだけである。だから正の方を記号なしというのにはある意味、意味のない発言なのである。

**正負の数の掛け算の定義** 単位  $T$  と数  $\alpha$  で表わされる変化量を  $R$  とする。 $R$  を単位として、数  $\beta$  で表わされる変化量を  $R'$  とする。 $R'$  を  $T$  を単位として表わした数を  $\gamma$  とする。掛け算とは、この  $\gamma$  を  $\alpha$  と  $\beta$  で表わすことである。そして  $\gamma$  を  $\alpha \times \beta$  と書く。

ここで一言注意したいのだが、それは掛け算においては正と負の数の役割が対称でないということである。足し算では対称であったのである。上の定義を読んだだけでは、それがわかりづらいので具体例で考えよう。図 3.1 のように単位  $T$  をとり、 $\alpha$  として例えば正の 3 をとろう。そして  $\beta$  としては負の 2 をとろう。負の 2 ということは  $R$  を単位とするわけだから、 $R'$  は  $R$  とは逆向きになって量は 2 倍になるということである。そして  $\gamma$  は  $-6$  となる。 $\beta$  が正の 2 のときは 6 になる。正と負の数というのは、足し算に関しては、正も負も役

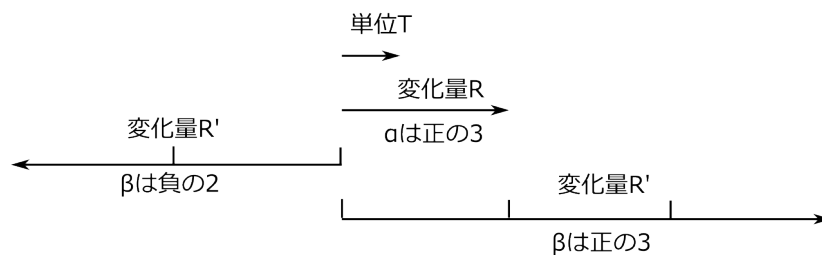


図 3.1

割が対称である。ただ単に最初に決めた単位と同じ向きかどうかというだけであり、あえて単位に向きなど付けずに、ただ単に方向 A と方向 B があるというだけの話であった。ところが、掛け算では負の数を掛けるということは向きを逆向きにするというので、正の数を掛けるのとは役割が違うのである\*3。

さて、具体的に計算規則を見てみよう。

$a, b$  を正の数としよう。だから  $-a$  は負の数である。さて正と負の数の掛け算は 1. 正×正 2. 正×負 3. 負×正 4. 負×負の 4 通りある。そして定義から明らかなように

$$a \times b = (a \times b)$$

$$a \times (-b) = -(a \times b)$$

$$(-a) \times b = -(a \times b)$$

$$(-a) \times (-b) = (a \times b)$$

となる。つまり同じ符号同士の掛け算は正。符号が異なるもの同士の掛け算は負となり。量の部分は量どうしの掛け算となる。そして

掛け算の交換則  $\alpha \times \beta = \beta \times \alpha$  が成り立つ

ことがわかる。結局正と負の掛け算とは正の 3 を掛けるなら、向きはそのまま 3 倍すること。負の 3 を掛

\*3 しかしこれも定義の上でそう見えるだけである。というのは節 3.7 の参考欄をみればわかるとおり、正の 1 に対応する数にかけてるので逆にしなければいけないのである。もし負の 1 に対応する数なら負の数をかけても逆にしなくてもよい。くわしくはその節で見て欲しい。

	記号	意味
掛け算	$\times(-2)$	向きを逆にして量を2倍
割り算	$\div(-2)$	量を2等分して向きを逆にする

表 3.1

けるなら、向きを逆にして量を3倍することなのである。明らかに向きを逆にして3倍するのと3倍してから向きを逆にするのは同じ効果をもたらす。さて、これも定義と上の式から明らかだが、 $\beta$ が正負のいずれの数でも

$$\alpha \times (-\beta) = -(\alpha \times \beta)$$

が成り立つ。

掛け算では逆演算子(-)は前に出せる。

といえる。

### 3.6 割り算

割り算は掛け算の逆算である。掛け算が変化量の向きを逆にして、量については、量の掛け算をするのだから、それを元に戻すのは量については量の割り算をして、向きを逆転することである。例えば  $(-6) \div (-2)$  なら、量については  $6 \div 2$  であり、向きは負の向きを逆向きにするわけだから正の向きになる。つまり  $(-6) \div (-2)$  は3に等しい。例えば  $\alpha \times (-2)$  というのは、 $\alpha$  で表わされる変化量の向きを逆にしてただの量を2倍するのであった。だから  $\alpha \div (-2)$  というのはその逆、つまり打ち消すということをするのだから2等分して向きを逆にするのであった。この表 3.1 のような操作で任意の数  $\alpha$  に対して

$$\alpha \times (-2) \div (-2)$$

は  $\alpha$  に戻るし、

$$\alpha \div (-2) \times (-2)$$

も  $\alpha$  に戻る。

さて割り算の定義だが、簡単に表現できる日本語がない。逆の数で割ることなど日常生活ではないからである。私も使うことがない。前に述べたように負の数は代数のためであり、その代数によって式が省略できるといことなのである。そこで簡潔さのために掛け算の逆算として定義する\*4。

**正負の数の割り算の定義**  $x \times \alpha = \beta$  となる数  $x$  を  $\beta$  と  $\alpha$  で表わすことを割り算という。そして  $x$  を  $\beta \div \alpha$  と書く。

例えば  $3 \div (-\frac{2}{5})$  は  $x \times (-\frac{2}{5}) = 3$  となる  $x$  のことだが、 $\times (-\frac{2}{5})$  とは向きを逆にして、5等分して、2倍することであった。これを元に戻すのは2等分して5倍して、向きを逆にするのである。すなわち  $\alpha \div (-\frac{2}{5})$  は  $-(\alpha \div 2 \times 5)$  である。だから

\*4 2.9 節の定義と同じである。

$\alpha \div (-\frac{N}{M})$  は  $-(\alpha \times \frac{M}{N})$  のことである。

さて掛け算の順序は入れ替えられるので、つまり  $\alpha \times x = x \times \alpha = \beta$  なので

**定理 3.1**  $\alpha \times x = \beta$  となる数  $x$  は  $\beta \div \alpha$  に等しい。

さて  $a$  と  $b$  を正の数とすると、明らかに以下の等式が成り立つ

$$a \div b = (a \div b)$$

$$a \div (-b) = -(a \div b)$$

$$(-a) \div b = -(a \div b)$$

$$(-a) \div (-b) = (a \div b)$$

つまり逆演算子は前に出せるわけである。すなわち

$$\alpha \div (-\beta) = -(\alpha \div \beta)$$

$$(-\alpha) \div \beta = -(\alpha \div \beta)$$

が成り立つ。

### 3.7 掛け算はいったい何を表わしているか

3.5 節で掛け算を定義したわけだが、これはいったい現実世界の何を表わしているのだろうか。ただの量についての掛け算なら、リンゴ5個が3個というように現実の世界を表わしていた。ところが向きを逆にして3つとは、一体何を表わしているのだろうか。そのことを説明しよう。

今、土地  $1 \text{ m}^2$  につき小麦  $2 \text{ kg}$  取れる土地を考えよう。いわゆる土地の面積と小麦の重さが比例している場合である。すると土地が  $1 \text{ m}^2$  増えるごとに小麦は  $2 \text{ kg}$  増える。だから土地  $2\text{m}^2$  増えれば小麦は  $4\text{kg}$  増える。逆に  $1 \text{ m}^2$  減れば  $2 \text{ kg}$  減り、 $2\text{m}^2$  減れば  $4\text{kg}$  減る (表 3.2)。土地が3倍になれば小麦も3倍になり、

土地 (単位 : $1\text{m}^2$ 増加)	小麦 (単位 : $1\text{kg}$ 増加)
-3	-6
-2	-4
-1	-2
0	0
1	2
2	4
3	6

表 3.2

土地が  $\frac{1}{3}$  になれば小麦も  $\frac{1}{3}$  になる。そして土地が逆向きに3倍になれば小麦も逆向きに3倍になる。さて、

この関係こそまさに掛け算で表わされる関係なのである。土地の増加を正の向き、小麦の増加を正の向きに取れば、

$$\text{小麦 (kg)} = 2 \times \text{土地 (m}^2\text{)}$$

という関係が成り立つ。例えば土地に  $-2$  を入れれば  $2 \times (-2)$  で小麦は  $-4$  になってくれる。正の向きを土地の増加にする必要はない。減少を正の向きにしてももちろんよい。 $1\text{m}^2$  減少を単位としてみよう。このときは

$$\text{小麦 (kg)} = -2 \times \text{土地 (m}^2\text{)} \quad (\text{正の向き、小麦増加、土地減少})$$

という関係式が成り立つ。同様に小麦  $1\text{kg}$  減少を正の向き、土地  $1\text{m}^2$  増加を正の向きにすると

$$\text{小麦 (kg)} = -2 \times \text{土地 (m}^2\text{)} \quad (\text{正の向き、小麦減少、土地増加})$$

という関係が成り立つ。最後に小麦  $1\text{kg}$  減少、土地  $1\text{m}^2$  減少を正の向きとすると

$$\text{小麦 (kg)} = 2 \times \text{土地 (m}^2\text{)} \quad (\text{正の向き、小麦減少、土地減少})$$

という関係式が成り立つ。このように掛け算は2つの量の比例関係を表わすのに使えるのである。

比例というのは、ある量(土地  $1\text{m}^2$ )とある量(小麦  $2\text{kg}$ )が対応するということを言っているわけである。そのある量(土地  $1\text{m}^2$ )を打ち消す量には当然もう一方のある量(小麦  $2\text{kg}$ )を打ち消す量が対応するわけである。

**定理 3.2** 2つの変化量 **A** と **B** が比例しており、ある単位で **A** は数  $\alpha$  で表わされ、**B** は数  $\beta$  で表わされるとする。**B** の単位量に対応する **A** の変化量を表わす数を  $\gamma$  としよう。そのとき

$$\alpha = \gamma \times \beta$$

という関係が成り立つ。

**【例】** 土地の単位量に対応する小麦の量  $2\text{kg}(\gamma)$  に土地  $3\text{m}^2(\beta)$  を掛けると、土地  $3\text{m}^2$  に対応する小麦の量  $6\text{kg}(\alpha)$  が求まる。



### 参考 正負の数の記号法

さてここで掛け算の規則の由来、掛け算の記号法、正負の非対称性を考えてみたい。2つの変化量 **A** と **B** が比例しており、**A** の2つの方向を  $(a1), (a2)$  と書こう。**B** の2つの方向を  $(b1), (b2)$  と書こう。今2つの変化量では量としての単位を（土地と小麦の例では  $m^2, kg$  のように）決めたとしよう。方向が  $(a1)$  で量が3であることを簡潔に  $3_{a1}$  と書いてみよう。今例えば、 $1_{b2}$  に対して  $2_{a1}$  が対応しているとしよう。 $3_{b2}$  に対応する **A** の量を

$$2_{a1}^{b2} \times 3_{b2} \quad (3.1)$$

と書いて見よう。ここで  $2_{a1}^{b2}$  というのは **B** が  $1_{b2}$  のときの **A** の量で、それが  $2_{a1}$  であるという意味だとしよう。このとき **A** の量は

$$(2 \times 3)_{a1}$$

となる。すなわち式 (3.1) で  $(b2)$  と  $(b2)$  なら **A** の向きは  $(a1)$  のままである。量  $3_{b1}$  に対応する **A** の量も

$$2_{a1}^{b2} \times 3_{b1} \quad (3.2)$$

と書いてみよう。結果は

$$(2 \times 3)_{a2}$$

となる。すなわち式 (3.2) で  $(b2)$  と  $(b1)$  がくれば  $(a1)$  が  $(a2)$  になる。 $2_{a1}^{b2}$  は  $(b2)$  の方向の1に対応する量だったからである。さて、今の記号法でも通常の言葉に比べればかなり簡潔である。しかしいちいち数に方向を書くのは煩わしい。それでどんな場合でも成り立つ記号法として逆演算子法が使われているわけである<sup>a</sup>。これは通常数学では単位をいちいち書かないようなものである。それは数の法則はどんな単位でもなりたつからである。ここで最も言いたかったことは、「負の数を掛けたら向きがなぜ逆になるか」というと、それは掛けられる数が正の1に対応する数だったからである。」ということである。

<sup>a</sup> もちろん歴史的には - 記号は徐々に使われていったのであろうが

## 3.8 割り算はいったい何を表わしているか

再び小麦と土地の例で考える。小麦の変化量と土地の変化量は比例しているとする。掛け算では、土地の単位量に対する小麦の量（今の場合  $2kg$ ）に土地の面積を表わす数（ $3 m^2$  なら  $3$ ）を掛けると、その面積に対応する小麦の量を表わすことになった。

$$\text{土地の単位量に対応する小麦の数} \times \text{土地の数} = \text{小麦の数}$$

割り算は掛け算の逆算であった。 $\alpha \div \beta$  とは  $x \times \beta = \alpha$  となる数であった。さて、 $\beta$  を土地の変化量を表わす数。 $\alpha$  をそれに対応する小麦の数とすると  $x$  は土地の単位に対応する小麦の数である。すなわち

$$\text{小麦の数} \div \text{土地の数}$$

は土地の単位量に対応する小麦の数を表わしているわけである。

定理 3.3 2つの変化量 **A** と **B** が比例しており、ある単位で **A** は数  $\alpha$  で表わされ、**B** は数  $\beta$  で表わされるとする。**B** の単位量に対応する **A** の変化量を表わす数を  $\gamma$  としよう。そのとき

$$\alpha \div \beta = \gamma$$

という関係が成り立つ。

【例】小麦 6kg( $\alpha$ ) を土地 3 m<sup>2</sup>( $\beta$ ) で割ると土地の単位 (1m<sup>2</sup>) に対応する小麦の量 2kg( $\gamma$ ) が求まる。

さて定理 3.1 より  $\alpha \div \gamma$  は  $\gamma \times \beta = \alpha$  とする数  $\beta$  と等しいのであった。 $\gamma$  と  $\alpha$  を前と同じ数の役割をさせると、これは  $\alpha$  に対応する土地の面積を表わすのであった。だから

定理 3.4 2つの変化量 **A** と **B** が比例しており、ある単位で **A** は数  $\alpha$  で表わされ、**B** は数  $\beta$  で表わされるとする。**B** の単位量に対応する **A** の変化量を表わす数を  $\gamma$  としよう。そのとき

$$\alpha \div \gamma = \beta$$

という関係が成り立つ。

【例】小麦 6kg( $\alpha$ ) を土地 1m<sup>2</sup> に対応する小麦 2kg( $\gamma$ ) で割ると小麦 6kg に対応する土地の面積 3m<sup>2</sup>( $\beta$ ) が求まる。

### 3.9 正と負の数での等式

正と負の数でも今までと同様な等式が成り立つ。それを証明していこう。

等式 3.1

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha$$

【証明】 定義から明らかなように足し算での 2 つの数の役割は対称である。どちらかを左に書かなければいけないから  $\alpha + \beta$  と書いているだけである。

等式 3.2

$$(\alpha + \beta) + \gamma = (\alpha + \gamma) + \beta$$

【証明】 これは要は足し算というものに順序はなく、何を合わせたかのみが意味を持つということを主張しているのである。今例えば図 3.2 のように  $\alpha, \beta$  は同じ向きで (図では (ア) という向き)、 $\gamma$  は異なる向きだしよう (図では (イ) の向き)。そして左辺も右辺も (ア) の量を全て足したものと (イ) の量を全て足したも

のを比べ、その差がこの足し算の量となり、向きは大きい方が（この場合（イ））この足し算の向きとなる\*5。

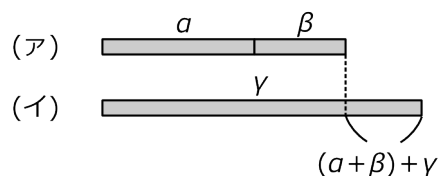


図 3.2

等式 3.3 和の全体に逆演算子を作用させるのは、和の各項に逆演算子を作用させるのに等しい。式で書くと

$$-(\alpha + \beta + \gamma) = -\alpha - \beta - \gamma$$

【証明】 図 3.2 の場合で考える。各項に逆演算子を作用させるということは単に向きの（ア）を（イ）に書き換え、（イ）を（ア）に書き換えればよい。するとその演算の結果は向きが逆になり量は同じである。それはまさに全体に逆演算子を作用させたということである。

等式 3.4 掛け算、割り算では全体に逆演算子を作用させることと、1つの項に逆演算子を作用させることは同じである。式で書くと

$$-(\alpha \times \beta \div \gamma) = ((-\alpha) \times \beta \div \gamma) = (\alpha \times (-\beta) \div \gamma) = (\alpha \times \beta \div (-\gamma))$$

【証明】 掛け算、割り算の定義から明らかである。3.5 節、3.6 節でも言及した。

等式 3.5 掛け算割り算の順序は演算結果に影響しない。式で書くと

$$\alpha \times \beta = \beta \times \alpha$$

$$\alpha \times \beta \times \gamma = \alpha \times \gamma \times \beta$$

$$\alpha \times \beta \div \gamma = \alpha \div \gamma \times \beta$$

【証明】 符号については負の数が偶数個なら、正の数になり、負の数が奇数個なら負の数になる。順序を入れ替えても負の数の個数は変わらない。そして量に関しては順序を入れ替えてもいいことは分数のときに証明したとおりである。これが理由である。

\*5 これは運動会での赤球、白球入れ競技と同じで、どっちにいつ赤球、白球が入ったかが重要ではなく、赤、白の合計だけの差だけが意味を持つのを想像してもらえればいいであろう。

等式 3.6 分配則が成り立つ。式で書くと

$$(\alpha + \beta) \times \gamma = \alpha \times \gamma + \beta \times \gamma$$

【証明】 まず  $\gamma$  が正の場合を考えよう。そして  $\alpha$  と  $\beta$  が同じ向きの場合と異なる向きの場合がある。同じ

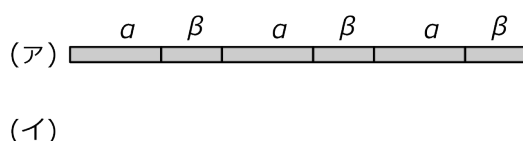


図 3.3

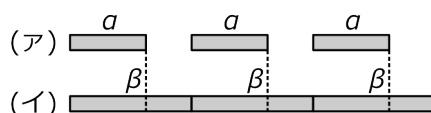


図 3.4

向きなら (図 3.3) 明らかに分配則が成り立つ。これは分数のときの分配則と同じである。異なるときは (図 3.4) 引き算と同じなのでこれも分数のときと同じである。すなわち  $\gamma$  が正なら分配則は成り立つ。さて  $\gamma$  が負の場合を考えよう。例えば  $-5$  だとして。逆演算子は前に出せる (等式 3.4) ので

$$(\alpha + \beta) \times (-5) = -((\alpha + \beta) \times 5)$$

となる。5 は正の数なのでこれは

$$-(\alpha \times 5 + \beta \times 5)$$

となり、さらに逆演算子をかっこの中に入れれば (等式 3.3)

$$-(\alpha \times 5) - (\beta \times 5)$$

となり、そして等式 3.4 より

$$\alpha \times (-5) + \beta \times (-5)$$

となる。というように負の場合も分配則が証明された。

ここで立ち止まって考えよう。正と負の数は役割が対称なはずだった。それなのに正の場合を証明し、それを使って負の場合も証明するのは何かおかしいのではないかと思える。そこで量の関係に戻って考えてみよう。まず

$$\gamma \times (\alpha + \beta) = \gamma \times \alpha + \gamma \times \beta$$

と書き変えよう。左辺は  $\gamma$  で表わされる量の数が  $\alpha + \beta$  あるという意味なのだが、それは  $\gamma$  であらわされる量が  $\alpha$  個あるのと  $\beta$  個あるのを合わせたものである。それはまさに右辺のことである。

尚、この節では足し算のみ扱い引き算は扱わなかった。それは引き算は逆演算子を作用させて足すという意味だから足し算に帰着するからである。

### 3.10 正と負での等式のまとめ

数が正負の数になっても分数の節 2.11 に記載した等式（自然数では等式 1.1 から等式 1.20）が全て成り立つ。証明方法も自然数の場合と全く同じで等式 1.1 から等式 1.20 の証明法と全く同じなので省略する。証明に使うのは等式 3.1 と等式 3.2 の足し算には順序は関係ない。等式 3.5 の掛け算には順序は関係ない。分配則（等式 3.6）が成り立つ。という命題だけである。

## 第4章

# 無理数

### 4.1 量を表わす数としての無理数

無理数とは  $\sqrt{2}$  や  $\sqrt{3}$ 、 $\pi$  などのことで、分数で表わせない数のことである。自然界の量の測定で無理数が現れることはない。ではなぜ無理数など必要なのであろうか。円周率を 3.1 として計算したとする。しかしよりよい精度のためには 3.14 の方がよい。さらに 3.141 と続き、これは限りなく続くように思われる。しかし実際には測定には限度があり、どこかで終わる。だがどこで終わるかわからない。それで理想化した極限として  $\pi$  を使うのである。現実の世界では完全な円など存在しない。だが円だとして円周や面積を計算しているのである。 $\sqrt{2}$  などと同様である。現実の世界には図 4.1 のような完全な直角二等辺三角形など存在しない。しかし直角二等辺三角形だとして、その斜辺を一辺とする正方形の面積を  $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$  として計算しているのである。自然界の連続量の式はすべて近似なのである。そしてその式がどの程度の近似なのかもわからないのである。だから実用上は無理数は一種の代数的文字だと考え、要求される精度に応じて分数を代入すると考えればよいわけである。

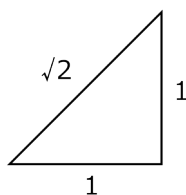


図 4.1

### 4.2 数学としての無理数

さて、ここからは数学としての無理数の話である。

$$\sqrt{2} \times \sqrt{3}$$

は  $\sqrt{6}$  に等しいかという問題を考えてみよう。 $\sqrt{2}$ 、すなわち自乗して 2 となる数として 1.4 を、 $\sqrt{3}$  に 1.7 を代入してみよう。1.4  $\times$  1.7 である。そしてこれを自乗しよう。掛け算に順序は関係ないので

$$(1.4 \times 1.7) \times (1.4 \times 1.7) = (1.4 \times 1.4) \times (1.7 \times 1.7)$$

となる。 $(1.4 \times 1.4)$  は 2 に近く、 $(1.7 \times 1.7)$  は 3 に近い。2 に近い数と 3 に近い数を掛けると 6 に近い数になる。 $\sqrt{2}$  と  $\sqrt{3}$  に、より近似のいい数を代入すれば、その数の自乗はより 6 に近づく。この操作を続けられ限りなく 6 に近づく。だから  $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$  は  $\sqrt{6}$  に等しいと言える。実用的にはこれが正しい理屈である。しかし何かすっきりしないものがある。そこでデデキントとという人が無理数というものは有理数（分数のこと）を上組と下組に分ける切断として定義した。どういうことかという、 $\sqrt{2}$  を例で考えよう。 $\sqrt{2}$  は自乗して 2 となる数である。1 は自乗して 1 なので  $\sqrt{2}$  の下組である。3 は自乗すると 9 で  $\sqrt{2}$  の上組である。すなわち、どんな分数も自乗したら 2 より大きいか小さいかがわかり、2 より大きければ上組に、小さければ下組に分類できる。この分類のこと、そしてそれに対応する量を表わす数が無理数だというのがデデキントの考えの私なりの解釈である。

**無理数の定義** 無理数とは有理数を上組と下組に分ける方法であり、その方法に対応した量を表わす数のことである。この対応した量を表わす数というのは、下組に入っている分数よりは大きく、上組に入っている分数よりは小さい量を表わす数という意味である。

さて、こう無理数を定義して、 $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$  は  $\sqrt{6}$  に等しいという証明の考え方を述べよう。この掛け算をどう定義するかという、 $\sqrt{2}$  の下組と  $\sqrt{3}$  の下組に属するもの同士の掛け算は  $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$  の下組に属し、上組同士の掛け算は上組に属すると定義するのである。これによってどんな分数も上組と下組に分かれる。そしてこれが  $\sqrt{6}$  の上組と下組に一致することを示せばいいわけである。これはわれわれの掛け算の連続性、数の連続性から明らかに成り立つであろう。これ以上先はやや技術的な問題に入りそうなので、ここでやめておく。

## 第 5 章

# 複素数

複素数は元々どんな 2 次方程式でも解を持つために作られた数であり、量を表わすものではない。量を表わさない数なら何の役に立たないと思われるかもしれないが、多少は役に立つ。主に三角関数の計算に使われている。世間では複素数というものに過大な評価をしていると思う。そして何か不思議な数のような言い方もされているが不思議なものでもなんでもない。数とは量を表わすものだと考えるから不思議に思えるだけである。だからあえて言えば数の分類に入れなければいいのである。あくまで複素数は 2 つの実数の組のことである。

**複素数の定義** 複素数とは 2 つの実数で表わされるものであり、 $a, b$  を実数として  $a + bi$  と書く。 $a$  を実部、 $b$  を虚部という。

【例】  $2 + 3i$  という複素数では 2 が実部で、3 が虚部である。

### 5.1 足し算

実部は実部、虚部は虚部を合わせて新しい数を作ることである。すなわち

**複素数の足し算の定義**

$$(a + bi) + (c + di)$$

とは  $(a + c) + (b + d)i$  のことである。

【例】  $(2 + 3i) + (6 + 4i) = (2 + 6) + (3 + 4)i = 8 + 7i$

### 5.2 引き算

引き算は足し算の逆算である。

**複素数の引き算の定義** だから  $(a + bi) - (c + di)$  とは  $(a - c) + (b - d)i$  のことである。



### 5.3 掛け算

まず

$$(a + bi) \times (c + di)$$

を  $i$  があたかも代数の文字だとして、分配則が成り立つかどうかとは気にせず、分配則を使って展開し  $i$  の自乗がでてきたら  $-1$  に置き換えてみよう。すなわち

$$(a + bi) \times (c + di) = (a + bi) \times c + (a + bi) \times di = (ac - bd) + (bc + ad)i$$

今の計算は掛け算の定義を見つけるための試行錯誤であり、この結果を掛け算の定義として採用する。

複素数の掛け算の定義  $(a + bi) \times (c + di)$  とは  $(ac - bd) + (bc + ad)i$  のことである。

そして全ての証明はこれを基にしなければならない。

### 5.4 割り算

割り算は掛け算の逆算である。 $z$  を複素数として  $z_1 \div z_2$  とは、これに  $z_2$  を掛けると  $z_1$  になる数である。そのような数は割る数である  $z_2$  が  $0 + 0i$  でないかぎり、ただ一つである。このことは後でふれる。又  $z_1 \times z_2 \div z_2$  は  $z_1$  に等しくなるのは逆算の一般的性質で 2.9 節でみたとおりである。

複素数の割り算の定義  $(a + bi) \div (c + di)$  とは

$$((a + bi) \div (c + di)) \times (c + di) = a + bi$$

となる数のことである。

この  $(a + bi) \div (c + di)$  を  $x + iy$  と置いて  $x$  と  $y$  を求めてみよう

$$(x + iy) \times (c + di) = a + bi$$

を解けばよい。左辺と右辺の実部と虚部が等しいということだから

$$cx - dy = a$$

$$dx - cy = b$$

という連立方程式を解けばよいわけである。これは  $c = d = 0$  でないかぎり解が唯一つ存在し<sup>\*1</sup>、それは

$$x = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}$$
$$y = \frac{-ad + bc}{c^2 + d^2}$$

となる。すなわち

<sup>\*1</sup> この方程式の行列式は  $c^2 + d^2$  だからである。

定理 5.1  $(a + bi) \div (c + di)$  は

$$\frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{-ad + bc}{c^2 + d^2}i$$

と等しい。

又、これは

$$(a + bi) \times \left( \frac{c}{c^2 + d^2} - \frac{d}{c^2 + d^2}i \right)$$

と等しいので

定理 5.2  $\div(c + di)$  は

$$\times \left( \frac{c}{c^2 + d^2} - \frac{d}{c^2 + d^2}i \right)$$

と同じことである。

#### 参考

さて純粋数学的でない本でよくある間違いを指摘してしよう。割り算の定義もなくいきなり、

$$\frac{a + bi}{c + di}$$

なるものを登場させ、この分母と分子に  $c - di$  を掛けて

$$\frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} \quad (5.1)$$

とし、これを展開して

$$\frac{(ac + bd) + (-ad + bc)i}{c^2 + d^2} \quad (5.2)$$

とし、さらに、分母は同じで実部と虚部に分けて

$$\frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{-ad + bc}{c^2 + d^2}i \quad (5.3)$$

とするのは論理的におかしい。まず第一に

$$\frac{a + bi}{c + di}$$

についてだが、これは  $(a + bi) \div (c + di)$  の意味であろう。それはいいとして割る数と割られる数に同じ数 ( $c - di$  のこと) を掛けたら同じ数になるという理由はどこにもないのである。そもそも  $(a + bi) \div (c + di)$  がいったい何を表わしているかすら言及していないのだから。式 (5.2) から式 (5.3) のところで  $c^2 + d^2$  を実部、虚部にわけて割り算してもいいというのも全く理由のないことなのである。とにかく割り算自体を定義していないのだから、この式はすべて虚飾である。もちろん、掛け算のときのように  $i$  をあたかも代数的文字と考えてとりあえず、実数の計算規則にならって計算してみる。そして出てきた結果、すなわち最後の式 (5.3) を割り算の定義とするのはもちろんよい。ただ、その場合はこれが掛け算の逆算になっていることを証明しなければならない。複素数を単に「実数のときと同じ計算規則に従う」としただけでは複素数が不思議な数に思えてきてしまうのではないだろうか。

## 5.5 複素数の等式

定理 5.3 足し算、引き算に順序は関係ない

【証明】足し算は実部と虚部でそれぞれ実数の足し算をしているだけである。実数では足し算、引き算に順序は関係ないので複素数でも関係ない。

定理 5.4 掛け算割り算に順序は関係ない

【証明】まず  $z_1 \times z_2 = z_2 \times z_1$  を示す。これは計算してみればわかる。 $z_1 = a_1 + b_1i$ 、 $z_2 = a_2 + b_2i$  とおく。

$$z_1 \times z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i$$

右辺は添え字の 1 と 2 を入れ替えても明らかに不変である。だから  $z_1 \times z_2 = z_2 \times z_1$  である。さて、 $z_1 \times z_2 \times z_3$  の順序を入れ替えられるというのは、どの 2 つを先に組み合わせても同じ数を表わすという意味である。とりあえず  $z_j = a_j + b_ji (j = 1, 2, 3)$  として順番に  $(z_1 \times z_2) \times z_3$  展開してみよう。結果は

$$(a_1a_2a_3 - b_1b_2a_3 - a_1b_2b_3 - b_1a_2b_3) + (a_1a_2b_3 - b_1b_2b_3 + a_1b_2a_3 + b_1a_2a_3)i$$

となる。これが添え字 1,2,3 の入れ替えに関して対称であることはすぐわかろう。よって  $z_1 \times z_2 \times z_3$  の順序は自由に入れ替えられる。このことから掛け算が何個続いても位置が自由に入れ替えられることが導かれる。割り算については定理 5.2 で述べたように割り算は掛け算に直せるので順序を自由に入れ替えられるのである。よって掛け算割り算に順序は関係ないということが証明されたわけである。

定理 5.5 分配則が成り立つ

$$(z_1 + z_2) \times z_3 = z_1 \times z_3 + z_2 \times z_3$$

【証明】  $z_j = a_j + b_ji (j = 1, 2, 3)$  を代入して左辺と右辺が等しいことを確かめればよい。

## 5.6 複素数の等式のまとめ

複素数でも自然数での等式 1.1 から等式 1.20 が（一覧では分数の節 2.11 の等式）全て成り立つ。証明法も全く同様であり、証明に使うのは今証明した定理 5.3 から定理 5.5 である。