光の軌跡の変換としてのローレンツ変換

2011 年 6 月 28 日

はしがき

本論文はローレンツ変換についての研究である。時間というものは本来、**運動のこと**であるという考えのもと、光の運動を時間の定義として使い、それをもとにローレンツ変換を考察している。相対論は元々我々の日常に慣れ親しんだ感覚に反するので論理の進め方は、なるべく直感のみにたよらず確実に事実らしいところから導き、推論の連鎖は丁寧に書いた。ただ、初めてローレンツ変換を学ぶ人向けには書いていない。本論文ではローレンツ変換とは、**互いに一様一定の速さで動いている系の間で、光の軌跡がどう測定されるのかの変換規則である**ということを強調した。

現代の物理学では座標を使った、解析幾何学的手法、代数的手法が主流である。筆者は、この座標幾何学的方法では確かに計算は速いし、新たな発見をするのに有効であるが、物理が埋没すると考えている。座標幾何学的方法は、方程式上ではこうならねばならない、というような感じで思わぬ発見ができるものである。筆者はこの座標幾何的手法より幾何学的な方法のほうが物理の本質や対称性が明白になるのではと考えている。ここでいう幾何学的とは座標幾何学に対するユークリッドの原論にあるような幾何学のことである。尚、アインシュタインの一般相対性理論は座標幾何学の典型例でありユークリッドの方法と対極をなすものだと考えられる。

2011 年 6 月

目次

第 1 章

時間

1.1 時間について

この論文では、時間というものを光の運動すなわち**光の移動した距離**と定義してローレンツ変換を考察する。すなわち、ある地点から光が発せられ、例えば距離 3m 離れた地点に到達したとすると、光が発せられてから到達したまでの時間を"3"と定義するのである。もちろん変換のための比例定数を掛けてもよいが（係数として例えば"2"としたらこの時間は 2 × 3 で 6 とする）本質的なことではないので考えないことにする。

なぜこのように時間を定義するのかというと**我々の時間についての感覚、概念をより恒久的な剛体上の距離に還元したいからである。**物理学では様々な概念を剛体上の長さに還元してきた。力、運動量、エネルギー、電気量などを考えてみればわかる。これは、測定というものは普通目盛を読むということからも明らかであろう。なぜ物理量を剛体の長さに還元する方法をとってきたかを明確に述べるのは難しいが、長さの関係が時間に依存せず不変なこと、すなわち、ある物体と別の物体がぴったり重なるなら、別の日もぴったり重なること。それと、この重なるというのが誰が見ても意見が一致するからであろう。これが例えば、熱いという感覚では、ある人は A と B は同じ熱さだといっても別の人は A の方が熱いということはよくあることだ。又、ある人が 2 つの物体 A と B を持って、A の方が重いと感じても別の人は B の方が重いと感じることもある。

時間の概念を長さに還元することは、実は我々人類が行ってきたことである。我々は地球の 1 回の自転を 1 日としてきた。すなわち、太陽の天球上の移動した長さを時間に使ってきた。古くは水時計が使われてきたが、これは水が減った量すなわち長さの 3 乗を時間として使ってきた。

時間というものは基準運動の回数のことである。基準運動は地球の自転であったり、水時計の水量の変化などがその例である。又、別の言葉で言えば**時間というものは運動の回数の比のこと**である。我々は、この比が過去も未来も一定であるということを経験上知り、数としての時間概念を得てきたのであろう。数というものは共通な性質を持ったものの個数のことである。例えばみかん 3 個というのは、みかんという共通な性質をもったものが 3 つあるという意味であり、果物 3 個というときは、果物という性質をもったものが 3 つあるという意味である。時間の場合で言えば、今日、砂時計の 1 回が水時計の 2 回に対応していたら、明日も砂時計の 1 回が水時計の 2 回に対応する事実を知り、我々は昨日の砂時計 1 回分と今日の砂時計 1 回分は**同じ**だとして時間を数えられるものと認識したのであろう。

単純な現象の運動どうしの比は一定である。振り子時計と砂時計の運動の比はほぼ一定であろうが、我々は経験上空気圧などで、これらの比が多少変化することを知っており、この 2 つの時計は真の時間を表わしていないことを知っている。ただこの「真の」というのは少し微妙な概念であり、より比が一定に保たれるものといってもいいかもしれない。今日は光の 1 往復が電子の 2 往復に対応し、次の日は光の 1 往復が電子の 3 往

復に対応するというのは過去と未来で物理法則が異なり我々の信念に反する。そういう意味で確率的な量子力学は我々の信念又は時間の一様性に反することになる。電子ビームが今日は電子 10 個スリットを通り抜け明日は 3 個というのは時間に関して対称ではない。我々はもし光と電子の運動の比が昨日と今日で異なれば、これは昨日と今日では異なる運動であり、原因を探るであろう。振り子時計が空気の摩擦によって一振動ごとに異なる運動をしていると推測するように。

時間の定義として、基準運動は光に限られない。どんな運動でも繰り返し同じ運動が行われればよいのである。振り子時計の場合、空気抵抗によって振動を重ねるごとに減衰し、厳密には一回目の往復と二回目の往復は同じ運動ではない。又振り子を構成している原子が多数あり、個々の原子の運動を見れば、一往復目と二往復目では全然違う運動であろうから振り子が同一の運動をしているとはいえない。ただし統計力学的にマクロでみれば同一の運動と見てよい。そういう意味で、時計としては、それを構成している粒子の数が少ない方がいいと言えるだろう。現在は原子時計が最も精密といわれているようだが、これとて程度の問題であろう。原子の内部には原子核があり、個々の陽子や中性子はいつも同じ運動をしているわけではないからである。

1.2 時間の定義

時間は最初に述べたように、光の移動距離で定義するわけだが、ここで正確に述べよう。まず例で考えよう。点 A で A さんが、点 B で B さんが手をたたいたとしよう。その事象をそれぞれ A(J)、B(J) と呼ぼう。図 1.1 のように事象 A(J) と同時に点 A から光を発し、点 A_1 に着いたとしよう。それと同時に点 A_2 から発せられた光が点 A_1 に着いたとしよう。点 A_2 からは点 A_1 に光が発せられたとの同時に点 B に光が発せられ、事象 B(J) と同時に点 B に着いたとしよう。各点間の距離は

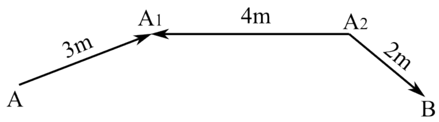


図 1.1

$$\mathrm{AA_1} = 3\mathrm{m} \quad \mathrm{A_1A_2} = 4\mathrm{m} \quad \mathrm{A_2B} = 2\mathrm{m}$$

だったとしよう。この場合、事象 A(J) が起きてから事象 B(J) が起きるまでの時間はどう定義すればよいだろうか。これは時間の普通の考え通り、事象 A(J) から点 A_1 での事象までの時間差は"3"、点 A_1 での事象から点 A_2 までの時間差は"-4"、点 A_2 での事象から事象 B(J) までの時間差は"2"、合計すると

$$3 - 4 + 2 = 1$$

すなわち事象 A(J) から事象 B(J) までの時間差は"1"と考えればよい。同様に事象 B(J) から事象 A(J) までの時間差は

$$-2 + 4 - 3 = -1$$

で"-1"と考えればよいのである。つまり符号が逆になるということである。では、この例を一般化して時間の定義を正確に述べよう。

時間の定義

ある事象から、別の事象への時間差は、その 2 つの事象を光の経路で表わして、光の経路がこの経路の向きと同じ部分は、その距離を、光の進行方向が経路の向きと逆の部分は、その距離にマイナスをつけたものを全て足し合わせたものである。

ここで、いくつか言葉を定義しておこう。**光の経路**とは上で例示したように折れ点では、隣り合う光の軌跡が同時に光の放出、又は到着が起きているものを指すとする。2 つの事象を**光の経路で表わす**とは、光の経路の始点と終点で光の放出、又は到着という事象と、この 2 つの事象がそれぞれ同時に起きているということである。今後もこの意味で使う。尚、**会合する**とは、2 つの事象が同じ位置で同時に起きることである。

1.3　全ての事象の時間を表わせること

今述べた方法でどんな 2 つの事象の時間差も表わすことができるということを示そう。A 地点で A さんが手をたたいた。その後、別の場所 B 地点で B さんが手をたたいた。この 2 つの事象を光の経路で表わしてみよう。A さんが手をたたいたとき、点 A から点 B に向けて光を発する。B さんが手をたたいたときも点 B から点 A に向けて光を発するとする。

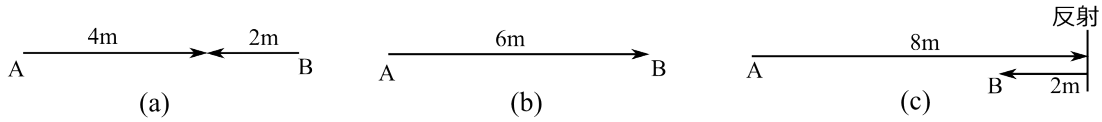


図 1.2

[間で会合する場合]

光が点 A と点 B の間で会合したとしよう。例えば図 1.2(a) のように点 A から 4m、点 B から 2 mの地点で会合したとする。この場合 A さんが手をたたいてから、B さんが手をたたくまでの時間差は

$$4 - 2 = 2$$

である。

[点 B で会合する場合]

次に、点 A からの光が点 B に到達したときと同時に B さんが手をたたいた場合を考えよう。この場合は A から B の距離がそのまま A さんが手をたたいてから B さんが手をたたくまでの時間差になる（図 1.2(b))。

[光が到達したとき、まだ B さんが手をたたいていない場合]

最後に点 A からの光が点 B に到達したとき、まだ B さんが手をたたいていない場合を考える。この場合点 A からの光は点 B を通り過ぎて、B さんが手をたたいたときに点 B に着くような点で折り返してもらう。図 1.2(c) の場合なら点 A から発せられた光は点 B を通り過ぎ 8 m進んだときに折り返し、2 m戻って点 B に着き、そのとき B さんが手をたたいたとすると A さんが手をたたいてから B さんが手をたたくまでの時間は

$$8 + 2 = 10$$

である。このように、どんな 2 つの事象でも光の移動した距離を足したり引いたりすれば、その時間差を計算できることがわかった。すなわち

命題 1　どんな 2 つの事象も、その事象が起きた点を結んだ直線上の光の経路で表わすことができる。

1.4　時間の定義が一意なこと

さて、このように光の移動距離で 2 つの事象の時間差を定義することができるためには、**2 つの事象の時間差はどんな光の経路で測っても等しくなければならない。**例えば図 1.3 のように点 A、点 B で起きた事象を 2 つの経路で測ったとき、一方では $3+2=5$、もう一方では $4+3=7$ となってはならないということである。それゆえ光は次のような性質を満たしている必要がある。

会合の原理
ある地点 A から光を 2 つの方向に同時に発し、その光が別々の経路を通って、ある同じ地点 B に到達したとき

(a)　2 つの経路の距離が等しいなら光は会合し、つまり同時に着き
(b)　距離が異なるなら会合しない、つまり同時に着かない

もし、今考えている系が空間的に等方だとしたらなら、そして光の速さが放出体の運動に依存しないなら、当然この会合の原理が成り立つであろう。ある方向へ進む光の速さの方が別の方向に進む光の速さよりも大きいとは考えづらいからである。ここで強調したいことは、光の速さがどの方向にも一定であるということは決して規約の問題ではないということである。光の移動距離で時間を定義すれば確かに光速はどの方向にも一定であり規約の問題だが、それだけでなく会合の原理を満たすという物理的事実があるのである。空気に対して動いている系で音波の移動距離を時間の定義に使うとしたら、音速はどの方向にも一定となるが、これは単なる規約である。音波は会合の原理を満たさず、音波の経路によって、事象間の時間差が異なってしまう。光速がどの方向にも一定であるということは、物理的にはこの会合の原理と同等であると私は考えている。実際のところ同等というよりも、光速がどの方向に対しても一定であるということの、より正確な表現ではないだろうか。

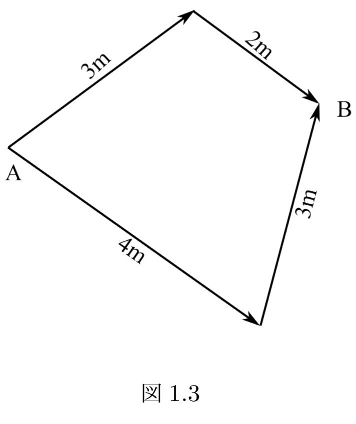


図 1.3

ところで、上記会合の原理だけでは 2 つの事象の時間差はどんな光の経路で測っても等しくなければならないということを満たすには不十分に見える。なぜなら、時間差を測るには当然、経路の中に経路の向きに逆行している部分を含んでいる光の経路も考慮に入れなければならないからである。例えば、図 1.4 のように点

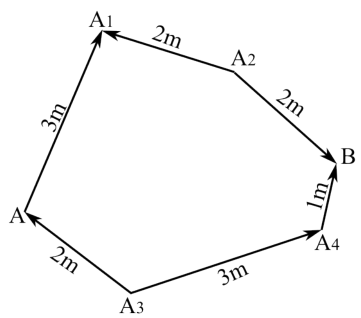


図 1.4

A、点 B で起きた事象を 2 つの経路で測ったとき、一方では $3-2+2=3$、もう一方では $-2+3+1=2$ というように異なってはならないのである。それゆえ、光は次のような性質を満たす必要がある。

第 2 会合の原理
始点での事象が会合しており、終点の位置が等しい 2 つの光の経路は
(a)　その経路の時間的距離が等しいなら終点で会合し
(b)　等しくないなら会合しない

ここで、あいまいさを防ぐために言葉の意味を明確にしておこう
時間的距離とは、その経路で測った時間差のことである。つまり点 A から点 B への光の経路の**時間的距離**とは、光が点 A から点 B への方向に進むなら、その距離、点 A から点 B への方向と光が逆行しているなら、その距離にマイナスをつけて、全ての直線について足したものである。図 1.4 の光の経路 $A \to A_1 \to A_2 \to B$ の時間的距離は $3-2+2=3$ である。
始点で**会合している**とは、図 1.4 の場合だと、点 A から点 A_1 へ光を発するのと点 A_3 から発せられた光が点 A に着くのが同時であるということであり、終点で**会合している**とは点 A_2 からの光が点 B に着くのと点 A_4 からの光が点 B に着くのが同時であるということである。**定義終わり**。今後もこの意味で使う。

第 2 会合の原理は会合の原理を含んでおり、より一般的に光の運動について述べているのである。この第 2 会合の原理も空間が等方的であり、そして光の速さが放出体の運動に依存しないなら、当然成り立つと考えられる。ただ単に表現のしかたが会合の原理よりも、もってまわった言い方をしているだけである。実際のところは、会合の原理の (a)、会合の原理の (b)、第 2 会合の原理の (a)、第 2 会合の原理の (b) という 4 つの原理は物理的に当然の事実を入れれば同等であるということが証明できる。ただ、それは少し話のすじがそれるので付録 A.1 で述べることにした。読者は最もイメージしやすい表現である **2 つの経路の距離が等しいならば光は会合する**という会合の原理 (a) を頭にいれてもらえればよいと思う。尚、この会合の原理は、時間空間が現代数学でいる線形空間であることに対応すると考えられる。少し不正確な表現が許されるならば、この会合

の原理は、ある位置、ある時刻における時間差が例えば"3"であるということは、別の位置、別の時刻における時間差が"3"であることと同等であるということを言っているのであろう。

ところで、**光速がどの系でも同じ値である**というのは、この会合の原理以上のことを主張している。これは一方の系で、ある砂時計 1 回分が光が 2m 進むのに対応していたなら、もう一方の系でも、その同じ砂時計 1 回分が光が 2m 進むのに対応する、ということも主張しているのである。光がそういう性質を持っているからこそ時間の定義に使えるのである。

第 2 章

光の軌跡の変換とローレンツ変換

2.1 状況の設定

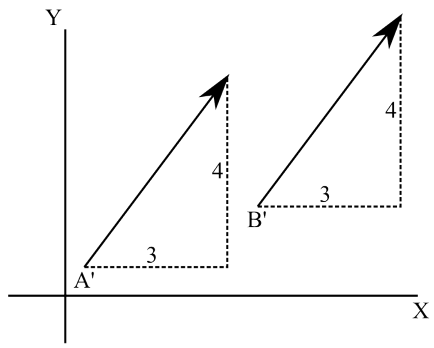


図 2.1

ローレンツ変換を導出するにあたって状況を明確にしておこう。考察するのは 2 つの剛体が互いに一定の速さ v で動いている状況である。これは、一方の剛体（S 系）から、もう一方の剛体（S' 系）のどこかに目印をつけて、S 系からその速度を測ると、S' 系のどこに目印をつけ、又、いつ測ろうとも、同じ向きと同じ大きさをもつということである。例えば S 系に図 2.1 のように直交座標 (x, y) を設けて、S' 系の点 A' の速度ベクトルを測ったら、$(3, 4)$ であったなら、S’ 系の別の点 B' の速度ベクトルも $(3, 4)$ であるということである。又、立場を入れ替え、S’ 系から S 系の任意の点の速度を測っても同じことが言えて、S 系の点 C の速度が S' 系から見て $(5, 0)$ だったなら、S 系の別の点 D の速度も $(5, 0)$ となるということである。ここで **S 系から見た S' 系の速度ベクトルの大きさ、すなわち速さと、S’ 系から見た S 系の速さは等しい**ということを仮定しておこう。このことは、S 系から見た S’ 系を見た速さより、S’ 系から S 系を見た速さの方が、大きかったり小さくなったりする理由が見当たらないという互いの系の同等性から自明と考えていいと思う。今設定した状況では、空間のどの位置も同等であり、時間的にもいつも同等である。この空間・時間の一様性からローレンツ変換の線形性が出てくるわけである。

2.2 軌跡の変換に帰着すること

ローレンツ変換とは、2 つの事象の時間差、位置差が、2 つの系でどう観測されるかという変換規則のことである。ところで第 1.3 節で述べたように、任意の 2 つの事象は光の軌跡をつなぎ合わせれば表わすことができるのであった。ということは光の軌跡の空間的変換の規則がわかれば、時間差、位置差の変換規則も求まるということである。例えば図 2.2(a) のように、点 A、点 B で起きた事象がある光の経路で表わせたとしよう。S 系でのこの 2 つの事象の時間差は光の移動距離が $5 + 3 = 8$ なので”8”、位置差は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の空間ベクトルが X 軸の方向に 7m 進んでいるので”7”、すなわち $(t, x) = (8, 7)$ である。この光の軌跡をもう一方の系で観測すると図 2.2(b) のように、光の移動距離が $4 + 2 = 6$ で、空間ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}$ が X' 軸の方向に 5m だったとし

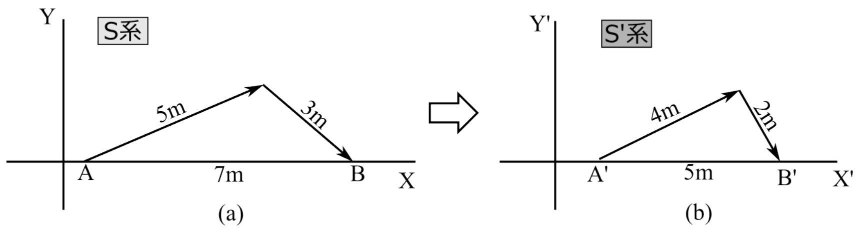


図 2.2

よう。すると $(t', x') = (6, 5)$ と求まる。すなわち、光の軌跡がどう変換されるかという知識から、2 つの事象の時間差と位置差が、S 系では (8,7) であるのが、S’ 系では (6,5) に変換されるということがわかるというわけである。まとめると

ローレンツ変換の導出は、光の軌跡が三次元空間的にどう変換されるかを求めることに帰着する

と言える。従って今後この空間的変換規則を求めていこう。

2.3　光の軌跡の変換の線形性

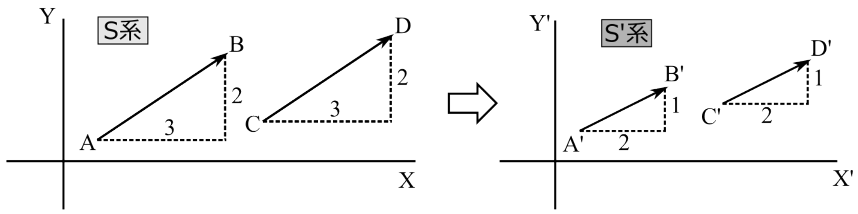


図 2.3

今、図 2.3 のように S 系での光の軌跡 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ があり、その成分が $(x, y) = (3, 2)$ だったとしよう。そして、この光の軌跡を S’ 系で観測した $\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}$ の成分は $(2, 1)$ だったとしよう。このとき、S 系での別の光の軌跡 $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ の成分も $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と同じ $(3, 2)$ ならば、それを S' 系で観測すると、その成分は、当然 $\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}$ と同じ $(2, 1)$ となるはずである。空間時間に特別な点はなく一様である状況を設定したからである。すなわち

光の変換原理 1　一方の系において、お互いに向きも長さもそれぞれ等しい 2 つの光の軌跡は、もう一方の系で測ってもお互いに向きも長さも等しくなる

と言える。このことから、光の軌跡の変換規則は、位置・時間を指定せずに求めればよいことになる。この原理から S 系で光が例えば図 2.4 のように $(3, 2)$ 進んで、さらにそのまま $(3, 2)$ 進むとすると、この光の軌跡は、$(3, 2)$ が $(2, 1)$ に変換されるとするならば、S’ 系では、$(2, 1)$ 進んでさらに $(2, 1)$ 進むことになる。つま

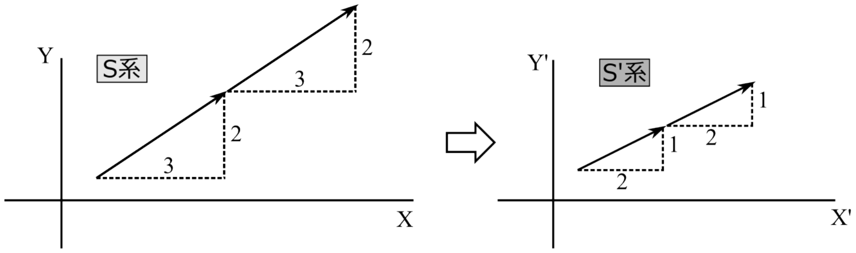


図 2.4

り、S 系で $2(3,2) = (6,4)$ 進む光は、S’ 系では、$2(2,1) = (4,2)$ 進むことになる。光の軌跡が 2 倍になれば、もう一方の系でも 2 倍になり、3 倍になれば、もう一方の系でも 3 倍になる。逆に 1/3 倍になれば 1/3 倍になる。又、考えを組み合わせると、2/3 倍になれば、2/3 倍になると言える。以上より

命題 2（光の軌跡の変換の線形性） ある系での光の軌跡 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ が、もう一方の系で $\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}$ だったとすると、$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の β 倍された光の軌跡 $\beta\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は、もう一方の系でも β 倍され $\beta\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}$ となる。

と言える。

2.4　運動方向の光の軌跡の変換

S 系の点 O から S’ 系の運動方向に光を放射する。光は 1m 進んで点 P で反射し元の点 O に戻ってきたとしよう (図 2.5)。さて、この光の軌跡を S’ 系で考えよう。S 系に対して速さ v で動いている S’ 系では光を放出した点を O’、反射した点を P’、光が S 系の点 O に戻ってきた点を O” としよう。表にすると表 2.1 のようになる。まず

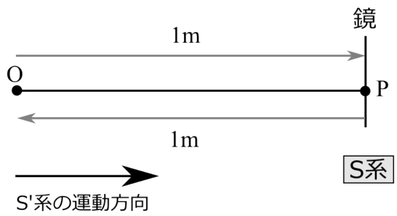


図 2.5

	S 系	S’ 系
光の放出地点	O	O’
光の反射地点	P	P’
光の最終地点	O	O”

表 2.1

光の変換原理 2　S 系で、S’ 系の運動方向に平行な光の軌跡は、S’ 系でも、その軌跡は S 系の運動方向に平行である。

と言える。これは、お互いの運動方向に関して対称[*1]であるからである。S 系では、光の軌跡が図 2.6(a) のように相手の運動方向に平行であるのに、S’ 系では、光の軌跡が図 2.6(b) の (I) のように 相手の運動方向に平

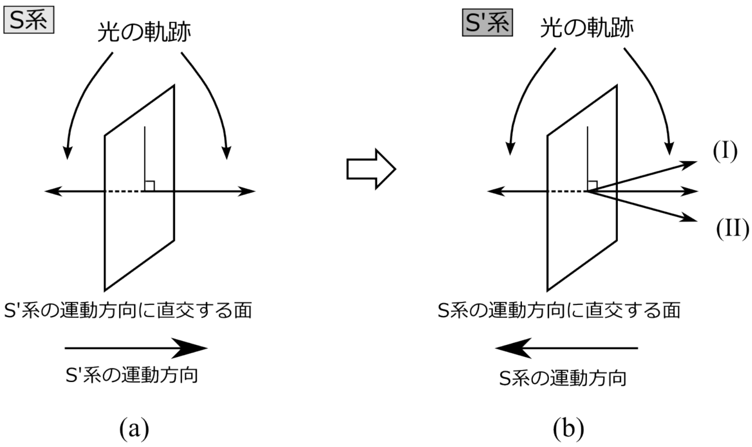


図 2.6

行でないなら、同じ理由で (II) という軌跡も考えられるからである。これはおかしいので S’ 系でも相手の運動方向に平行になる。この光の変換原理 2 から、S’ 系では図 2.7 のように点 O’、点 P’、点 O” が S 系の運動方向に平行な 1 つの直線上に並ぶと言える。

S 系で S’ 系の動いている方向に 1m 進んだ光は、S’ 系では未知数 α 進んだとしよう。すなわち O’P’=α とする。となると、S 系で点 P で反射して、S’ 系の動いている向きと逆向きに 1m 進んだ光は、S’ 系では $1/\alpha$ 進むはずである。理由を述べよう。光が 1m 進んだというのが、その光の進行方向に動いている系で α 進んだと観測されるなら、2m 進んだ光は、命題 2(光の軌跡の変換の線形性) より、光の進行方向に動いている系では 2α 進んだと観測されるはずである。すなわち、光の進行方向に動いている系では光の移動距離は α 倍される。一方反射した光は、立場が入れ替わり、S 系が光の進行方向に動くわけだから、S 系の光の移動距離は S’ 系のそれの α 倍である。今、S 系で 1m なので、S’ 系では $1/\alpha$ になるというわけである。

以上より、S’ 系では図 2.7 のように、光の放出点 O’ から反射点 P’ までの距離が α、反射点 P’ から光の最終点 O” までの距離が $1/\alpha$ なので、光は合わせて $(\alpha + 1/\alpha)$ 進んだことになる。別の言い方をすれば点 O’ で光を放出してから、点 O” に着くまでの時間が $(\alpha + 1/\alpha)$ だということである。一方 S 系の光を放出した点 O は S’ 系から見て速さ v で点 O’ から点 O” に時間 $(\alpha + 1/\alpha)$ かかって進んだのだから、進んだ距離 O’O”=$v(\alpha + 1/\alpha)$ である。また光の移動距離の差より O’O”=$(1/\alpha - \alpha)$ である。すなわち

$$\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) v = \frac{1}{\alpha} - \alpha$$

[*1] 運動方向に関してというべきか、直交方向に関してというべきか、言葉をどう使うべきかわからないが意味は分かってもらえると思う。

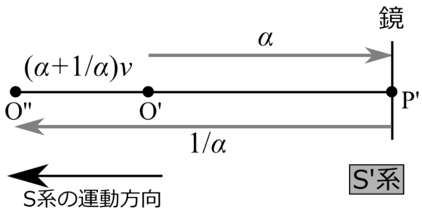


図 2.7

でなければならない。これを未知数 α について解くと

$$\alpha = \sqrt{\frac{1-v}{1+v}} \tag{2.1}$$

と求まる。以上より、

命題 3　(運動方向の変換規則)
(a)　S 系で、S' 系の運動方向へ進行している光の軌跡は、S' 系では、長さは $\alpha = \sqrt{\frac{1-v}{1+v}}$ 倍され、進行方向は S 系の運動方向に対して反対向きとなる。
これを逆の立場から見ると
(b)　S 系で、S' 系の運動方向に対して反対方向へ進行している光の軌跡は、S' 系では、長さは $\frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{1+v}{1-v}}$ 倍され、進行方向は S 系の運動方向である。

と言える。この変換則は相手の系の速さが v であることを使って求めたのである。

2.5　光のドップラー効果

ここで今の結論の応用例として光のドップラー効果について述べよう。この節の内容は論文の流れからはずれているので、飛ばしてもらっても後の理解に関係しない。今知りたいことは、ある光の波長を、ある系 (S 系) で観測したときの値と、S 系からみてその光の進行方向に速さ v で動いている系でその光の波長を観測したときの値との関係である。まず議論の前提として**光の波の山はどの系で見ても山である**ということを仮定しておこう。これは決して自明なことではないが、電磁場の変換則から導けることである。水の波や、音の波なら、これは自明であろう。

今、波長が λ である光 G があり、その山がある点 A に来たとしよう。それと同時に、その点 A から、光の進行方向と反対向きに波長測定用の光 H を発するとしよう。その光 H は、λ だけ進んだ点で、光 H を発したときに点 A にあった山の次の次の山と会合する。なぜなら、点 A で光を発したとき、次の次の山は 2λ 離れた点にあり、そしてお互い λ 進んだ点で会合するからである。これは図 2.8 からも明らかであろう。すなわち、ある光 G の波長を知りたければ、ある点 A に光 G の山がきたとき、この点 A から、光 G の進行方向と逆向きに光 H を発し、その光 H が光 G の次の次の山とぶつかるまでに移動した距離を測ればよいということである。

点 A で、光 G の山が来たときに、波長測定用の光を発したという事実と、この測定用の光が次の次の山と会合したという事実は、どの系で見ても、そのことが起きているわけである。よって、別の系で、光 G の波長

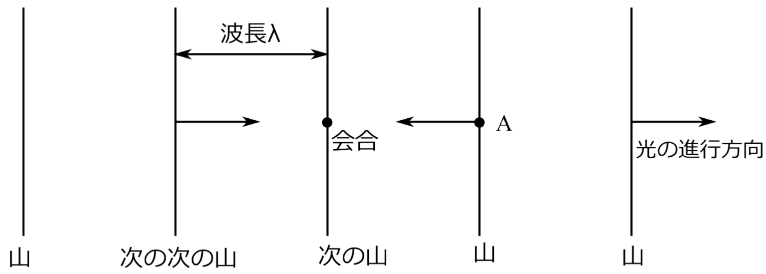


図 2.8　点 A に山が来たとき光の進行方向の逆向きに光を発する。光は波長 λ 進んだとき次の次の山と会合する。

を知りたければ、測定用の光の移動距離がどう変換されるかを知ればよいわけである。となると、光の進行方向に動いている系というのは、測定用の光に対して逆向きに動いているわけだから、命題 3(b) より、波長は $1/\alpha$ 倍され、光の進行方向と逆向きに動いている系というのは、測定用の光の向きに動いているわけだから、命題 3(a) より、波長は α 倍される。以上より

命題 4（ドップラー効果）　ある系で波長が観測された光を、
(a)　その光の進行方向に速さ v で動いている系から観測すると波長は $\sqrt{\frac{1+v}{1-v}}$ 倍される。
又、同じ事だが、
(b)　その光の進行方向に対して逆向きに速さ v で動いている系では波長は $\sqrt{\frac{1-v}{1+v}}$ 倍される。

と言える。

2.6　運動方向に対して直交し同時である事象

S 系で 1m 離れた点 A、点 B で同時に起きた事象 A(J)、B(J) を考える。直線 AB は S' 系の運動方向に対して直交しているとする (図 2.9)。事象 A(J)、B(J) を S' 系で観測したときその位置を A'、B' とする。このとき直線 A' B' は S 系の運動方向に対して直交していると推測できる。理由を述べよう。S' 系において直線 A'B' と S 系の運動方向とのなす角が図 2.9(a) のように、もし A' の側の角度の方が小さいなら、同じ理由で図 2.9(b) のように B' の側が小さいとも言えるわけである。これはおかしいので、直線 A'B' は、S 系の運動方向に直交していると言える。又、事象 A(J)、B(J) は S' 系で観測しても同時に起きたと推測できる。なぜなら、もし A(J) が B(J) より、先に起きたというなら、同じ理由で B(J) の方が A(J) より先に起きたと主張できるからである。最後に、直線 A'B' の長さは 1m であると推測できる。理由を述べよう。もし、S 系の 1m の距離が S' 系で 1m と異なり、例えば 3m だったとしたら、時間空間の一様性より S 系での 1/3m が S' 系で 1m と観測されるはずである。一方の系の 1m が 3m に変換されるのに、もう一方の系の 1m が 1/3m に変換されるのは互いの系が同等であると設定したことに反する。よって、A'B' の長さは 1m のはずである。以上の議論より

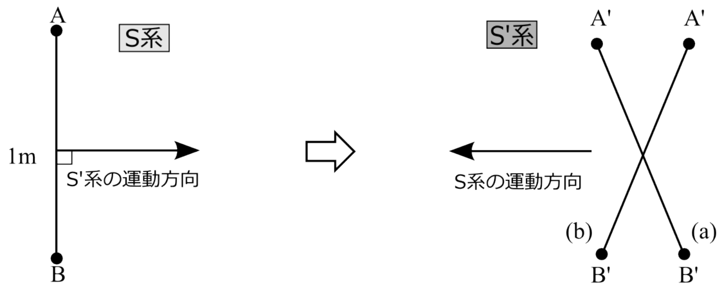


図 2.9

> **命題 5**　S 系で同時に起きた 2 つの事象の位置を結んだ線が S’ 系の運動方向に直交しているなら、S’ 系でも、その 2 つの事象は同時に起き、かつ 2 つの事象が起きた点を結んだ線は S 系の運動方向に直交し、又、その距離も S 系で測った距離と等しい。

と言える。

これで十分説得力のある推論を行ったわけだが、本来同時ということは光の軌跡で表わさなければならない。それが、この論文の本旨である。それで、今の命題 5 を光の軌跡の変換で説明してみよう。S 系で図 2.10 のように、光を点 O から S’ 系の運動方向と直角方向に、同時に互いに 180 度反対の向きに放出し、それぞれ 1m 進んで、点 A、点 B に到達したとしよう。その事象をそれぞれ A(J)、B(J) と呼ぼう。明らかに、S 系では A(J) と B(J) は同時である。S’ 系では光を放出した点を O’、事象 A(J)、B(J) に対応する点を A’、B’ としよう。このとき平面 O’A’B’ は S 系の運動方向と平行になると推測できる。なぜなら、図 2.10 のように平面 O’A’B’ が S 系の運動方向に平行でないのは、相手の運動方向に関して対称であることに反するからである。このことを枠にくくって書いておこう。

> **光の変換原理 3**　S 系において、ある点から S’ 系の運動方向と直角方向に同時に互いに 180 度反対向きに光を放出したとすると、S’ 系では、この 2 つの光の軌跡によってできる平面は S 系の運動方向に平行である。

ところで、

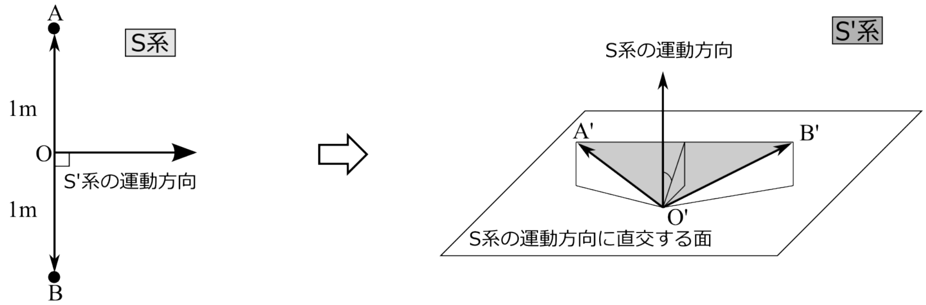
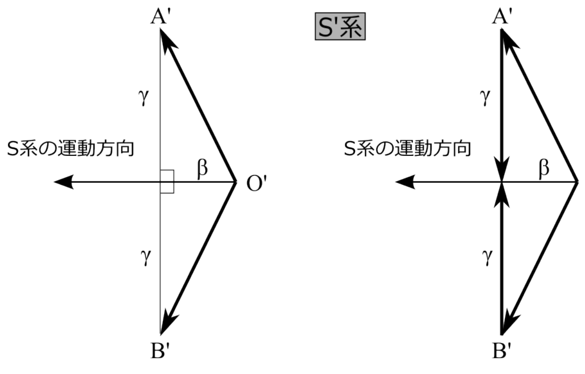


図 2.10

設定　相手の系の運動方向に対して直角に 1m 進む光は、もう一方の系では、相手の運動方向に β、直角方向に γ 進む

としよう。すると S' 系では光の軌跡は図 2.11(a) のように S 系の運動方向に関して対称になるであろう。A'O' と B'O' の距離が等しいので、S' 系でも事象 A(J)、B(J) は同時である。又、直線 A'B' は S 系の運動方向に直交している。次に図 2.11(b) のように、点 A' に着いた光は、方向を変え点 B' の方向に進み、点 B' に着いた光は点 A' の方向に進むとする。光は会合の原理より、それぞれ γ 進んだ点で会合する。この一連の光



(a)　(b)

図 2.11

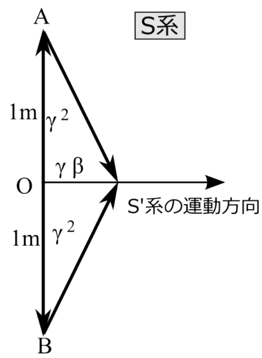


図 2.12

の軌跡を S 系で観測するとどうなるか。今度は S 系と S' 系の立場が入れ替わったわけで、S' 系で S 系の運動方向に対して直角に γ 進む光は、S 系では上記設定と命題 2(光の軌跡の変換の線形性) より、図 2.12 のように S' 系の運動方向に $\gamma \cdot \beta$、直角方向に $\gamma \cdot \gamma$ 進むことになる。すなわち AO の長さは γ^2 である。一方、最初の設定より、AO=1 なので、結局 $\gamma = 1$ でなければならない。よって A'B' の長さは S 系での長さと同様 2m でなければならない。これで最初に光を使わないで述べた命題 5 に光の軌跡の変換による説明がついたわけである。

以上の結論から直交平面上の合同性も言える。今、S 系で S' 系の運動方向に対して直交する面上の 3 点 A,B,C で同時に起きた事象を考えよう。S' 系ではこの事象の起きた点をそれぞれ A',B',C' としよう。このとき、S 系では点 A、点 B で起きた事象は同時であり、直線 AB は相手の運動方向に直交しているので、命題 5 より AB=A'B' となる。同様に BC=B'C'、CA=C'A' となる。対応する三辺が等しいので三角形 ABC と三角形 A'B'C' は合同である (図 2.13)。ということは任意の多角形も合同になるということである。以上より

命題 6（直交面上の合同性）　あるいくつかの事象が、S 系では、S' 系の運動方向に直交する面上で同時に起きたとし、その起きた点によってできる多角形を A としよう。このとき、S' 系では、この事象は S 系の運動方向に直交する面上で同時に起き、その起きた点によってできる多角形 A' は多角形 A と合同である。

と言える。

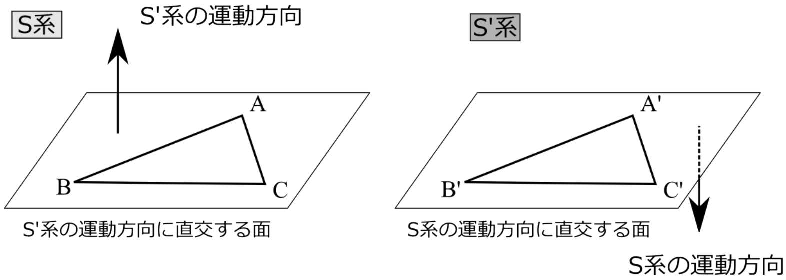


図 2.13

2.7　運動方向と異なる向きの光の軌跡の変換

次に今までの結果を利用して、相手の系の運動方向と異なる向きの光の軌跡が、どう変換されるかを考えよう。今、S 系において図 2.14(a) のように、長さ a、S' 系の運動方向に成分 b、直角方向に成分 c をもつ光の軌跡 OA を考える。ここで b は負の場合も想定しよう。b が負の場合は図 2.14(b) のように S' 系の運動方向と

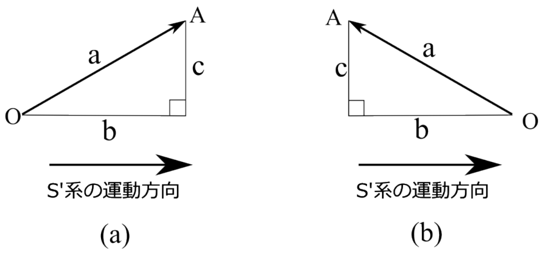


図 2.14

逆向きの成分をもつとする。この光の軌跡は S' 系では長さ a'、S 系の運動方向に反対向きに成分 b'、直角方向に成分 c' をもつ光の軌跡に変換されるとしよう。我々は a, b, c を使って a', b', c' の値を表したいのである。

さて、この光の軌跡 OA をすでに変換規則がわかっている光の経路で表わしてみよう。図 2.15(a) のように点 O から点 A に光が発せられると同時に点 O から S' 系の運動方向に光を発する。その光は S' 系の運動方向に R 進み、点 P で反射して反対方向に L 進み、点 B に着くとする。R と L は

$$R + L = a, \quad R - L = b \tag{2.2}$$

を満たしているとする。つまり、光が点 B に着いたとき点 O からの光が点 A に着いたときと同時になるようにし、直線 AB と OB が直交するように R と L を決めるのである。点 A、点 B の間は、AB の中点 K に点 A、点 B から光が向かっているとする。光の経路 O→P→B→K→A と光の経路 O→A は時間的距離が等しいので点 A で会合する。よって、光の経路 O→P→B→K→A が、いかに変換されるかがわかれば OA の変換がわかるということである。ここで、あいまいさを防ぐために記号を表に整理しておこう。

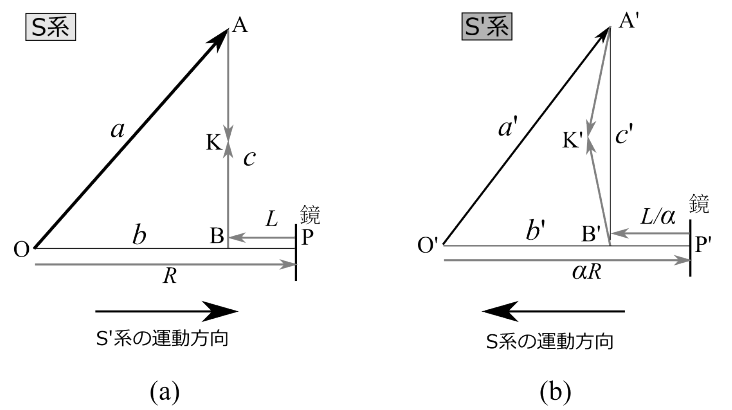


図 2.15

事象	その内容	S 系	S’ 系
O(J)	点 O から点 A、点 P に向かって光が発せられた事象	O	O’
A(J)	点 O からの光が点 A に着いた事象	A	A’
P(J)	点 O からの光が点 P に着いた事象	P	P’
B(J)	点 P からの光が点 B に着いた事象	B	B’
K(J)	点 A からの光と点 B からの光が会合した事象	K	K’

この光の経路は図 2.15(b) のように、S’ 系では命題 3(a) より、S 系の運動方向と逆向きに αR、命題 3(b) より、進行方向に L/α 進んで点 B’ に着く。事象 A(J) と B(J) は S 系では同時であり、直線 AB は S’ 系の運動方向に直交しているので、S’ 系でも直線 A’B’ は命題 5 より、S 系の運動方向に直交し、長さは A’B’=AB である。よって、$c' = c$ である。又、直線 A’B’ が S 系の運動方向と直交しているので、b' =O’B’$= \alpha R - L/\alpha$ である。光の経路 O’→A’→K’ と O’→P’→B’→K’ は点 K’ で会合しているので、会合の原理より

O’A’+A’K’=O’P’+P’B’+B’K’

でなけれならない。そして A’K’=B’K’ なので

O’A’=O’P’+P’B’

を満たす必要がある。O’P’+P’B’$= \alpha R + L/\alpha$ なので、a' =O’A’$= \alpha R + L/\alpha$ でなければならない。以上のことをまとめると

命題 7（運動方向と異なる向きの光の変換規則） S 系において、長さ a、S’ 系の運動方向に成分 b、直角方向に成分 c をもつ光の軌跡は S’ 系では、長さ $a' = \alpha R + L/\alpha$、S 系の運動方向に反対向きの成分 $b' = \alpha R - L/\alpha$、直角方向に成分 $c' = c$ の軌跡に変換される。略式で書くと

$$(a, b, c) \longrightarrow (\alpha R + L/\alpha\,,\, \alpha R - L/\alpha\,,\, c)$$

である。ここで $R = (a+b)/2\,,\, L = (a-b)/2$ であり、$\alpha = \sqrt{\frac{1-v}{1+v}}$ である。b は負の場合もあるとする。

この命題は $c = 0$ とおけば、命題 3 を含んでいることになる。
　ところで、a' の値は今、会合の原理を使って

$$a'(\text{会}) \equiv \alpha R + L/\alpha$$

と求めたが、三平方の定理からも

$$a'(\text{三}) \equiv \sqrt{b'^2 + c'^2} \tag{2.3}$$

と求まる。そこで、この 2 つの方法で求めた値が等しいことを確認する必要がある。
[証明] $c'^2 = c^2$ であり、S 系での三平方の定理より $c^2 = a^2 - b^2$ である。これに式 2.2 の R と L を代入すると

$$\begin{aligned} c'^2 =& a^2 - b^2 \\ =& (R + L)^2 - (R - L)^2 \\ =& 4RL \end{aligned}$$

である。これを式 2.3 に代入すると

$$\begin{aligned} a'(\text{三}) =& \sqrt{(\alpha R - L/\alpha)^2 + 4RL} \\ =& \sqrt{(\alpha R + L/\alpha)^2} \\ =& aR + L/\alpha \end{aligned}$$

である。よって a' の値は、会合の原理から求めた値と三平方の定理から求めた値と一致することが確認できた。[証明終]
同じことなのだが理解を深めるために別証を書いておこう
[別証]

$$\begin{aligned} a'^2(\text{会}) - b'^2 =& (\alpha R + L/\alpha)^2 - (\alpha R - L/\alpha)^2 \\ =& 4RL \\ =& a^2 - b^2 \end{aligned}$$

となり、会合の原理を満たしていれば、三平方の定理に関係なく

$$a'^2(\text{会}) - b'^2 = a^2 - b^2 \tag{2.4}$$

が成り立つ。S 系での三平方の定理より $a^2 - b^2 = c^2$ なので

$$a'^2(\text{会}) - b'^2 = c^2 \Longleftrightarrow a'(\text{会})^2 = b'^2 + c'^2 \Longleftrightarrow a'(\text{会})^2 = a'(\text{三})^2$$

となり、両者が一致することがわかる。[別証終]
　しかし、会合の原理から求めた値と三平方の定理から求めた値とが一致するというのは私には大きな驚きである。今までの議論からわかるように、$a'(\text{会})$ の求め方は相手の系の速さが v であることや、対称性を用いて求めたものであり、三平方の定理とは一切関係ない。それなのに、両者が一致するというのは私には不思議でしょうがない。もちろん、この不思議と感じるのは、こうあらねばならないという誤った決めつけがあるか、理解不足が原因なのだろう。想像の域を出ないが、おそらく、三平方の定理は平行線の公理より、導き出されたものであり、平行線の公理は空間が一様であることに関係ある。一方、この論文での光の軌跡の変換方法も、空間の一様性を使って導出している。そういうことで関係があるのだろう。

2.8　会合の原理から三平方の定理の導出

ところで、三平方の定理と会合の原理が矛盾しないということは、2 つの系で会合の原理が成り立つためには三平方の定理が成り立たなければならないということが言えそうである。すなわち、2 つの系で会合の原理が成り立つことから三平方の定理を証明できるということを示唆していると考えられる。実際、そのとおりであり、以下に証明を述べる。この証明は今後の理解に関係ないので飛ばしてもらって差し支えない。

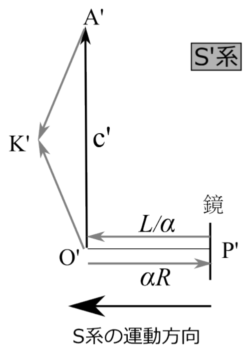


図 2.16

[証明] 前節式 2.4 で述べたように三平方の定理が成り立つということとは関係なく、会合の原理が成り立つなら

$$a'^2(\text{会}) - b'^2 = a^2 - b^2$$

が成り立つ。ここで $b' = 0$ となるように S' 系の速さ v を決めれば、S' 系では三角形がつぶれて $a'(\text{会}) = c'$ となる。$c' = c$ なので結局

$$c^2 = a^2 - b^2$$

が成り立つというわけである。[証明終]

[別証] この証明では少し簡潔すぎるので、$b' = 0$ となるような光の経路を実際に考えて三平方の定理を証明してみよう。記号は前節と同じとする。今は $b > 0$ としておこう。今、S' 系の速さを十分速くとり、S 系において点 O から出た光が点 P で反射して点 B に着いたとき（これは点 O からの光が点 A に着いたときと同時)、S' 系の点 O' が点 B に着くようにする。すなわち S' 系では、図 2.16 のように、点 P' で反射した光が点 O' に戻ってき、そして O'A' が S 系の運動方向に直交するように速さをとるのである。このような速さをとることは当然可能で、$v = b/a$ とすればよい。$a > b$ なので $v < 1$ となる。実際 S' 系において、点 P' で反射した光が点 O' に戻ってくるという条件は $\alpha R = L/\alpha$ ということであり、これを変形すると

$$\alpha R = \frac{L}{\alpha} \Longleftrightarrow \alpha^2 = \frac{L}{R} \Longleftrightarrow \frac{1-v}{1+v} = \frac{a-b}{a+b} \Longleftrightarrow \frac{1-v}{1+v} = \frac{1-b/a}{1+b/a}$$

となり、$v = b/a$ であれば確かによい。光は点 K' で会合するので

O'A'=2O'P'

が成り立つはずである。O'A'=c'=c なので、(2O'P')^2=$a^2 - b^2$ であることを示せればよい。実際、

$$(2\text{O'P'})^2 = (2\alpha R)^2 = 4\alpha^2 R^2$$

であり、今の場合 $\alpha R = L/\alpha$ なので $4\alpha^2 R^2 = 4RL$。そして

$$4RL = 4 \cdot \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a-b}{2} = a^2 - b^2$$

となり、よって (2O'P')^2=$a^2 - b^2$ となる。すなわち $a^2 = b^2 + c^2$ となる。[別証終]

以上より

命題 8　2 つの系で会合の原理が成り立つためには、三平方の定理が成り立たなければならない

ということが証明された。おそらく、三平方の定理が成り立つことと、平行線の公理は同等であると思う。平行線の公理より三平方の定理の証明は、ユーグリッドの原論や普通の幾何学の本に出ているが、おそらく三平方の定理から平行線の公理を導けるであろう。このことは数学の世界では既に証明されているのではないだろうか。そう仮定すると上記命題は

予想　2 つの系で会合の原理が成り立つためには、平行線の公理が成り立たなければならない。

と言い換えられる。こう述べると不思議さはあまり感じなくなる。平行線の公理が成り立たないようでは、空間が等方的でなく、会合の原理が成り立ちそうもないからである。

2.9　任意の方向の光の軌跡の変換規則

2.9.1　空間座標の設定

任意の光の軌跡の変換則を述べるために S 系、S’ 系に 3 次元空間座標系を設定しよう。S 系において、S’ 系の運動方向に直交する平面を考え、その平面内で同時に起きる 3 つの事象 O(J)、A(J)、B(J) を考える。その事象の位置を点 O、点 A、点 B とする。直線 OA と直線 OB は直交しているとする。点 O から S’ 系の運動方向へ X 軸をとる。又、点 O から点 A に向かって Y 軸、点 O から点 B に向かって Z 軸をとる (図 2.17)。S’ 系では O(J)、A(J)、B(J) が起きた場所の点を O’、A’、B’ とする。点 O’ から S 系の運動方向と反対向き

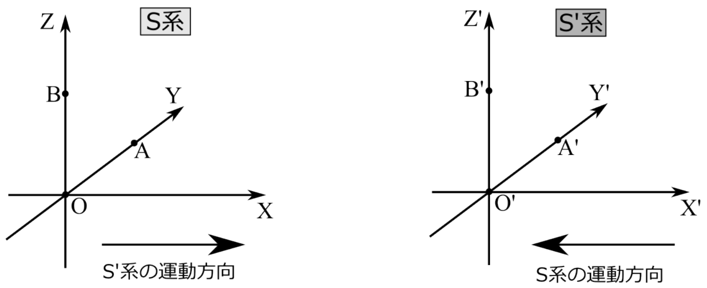


図 2.17

に X’ 軸をとる。点 O’ から点 A’ に向けて Y’ 軸を取る。点 O’ から点 B’ に向けて Z’ 軸を取る (図 2.17)。前節の命題 6(直交面上の合同性) より Y’ 軸と Z’ 軸は直交する。

2.9.2　この空間座標での有用な命題

この空間座標の設定から言えることを述べよう

命題 9　S 系において、事象 A(J)、B(J) が起きた点を A、B とし、直線 AB が X 軸に平行なら、S' 系においても事象 A(J)、B(J) に対応する直線 A'B' は X' 軸に平行である。

[**証明**] 1.3 節の命題 1 で述べたように、ある系における 2 つの事象差は、その 2 つの事象が起きた点を結んだ直線上の光の経路で表わすことができる。S 系において直線 AB は X 軸に平行なので、この光の経路は X 軸に平行である。ということは光の変換原理 2 で述べたように、この光は S' 系においては X' 軸に平行である。よって直線 A'B' は X' 軸に平行である。[**証明終**]

命題 10　どんな事象でも、その事象の S 系での位置の y 座標、z 座標とその事象の S' 系での位置の y' 座標、z' 座標はそれぞれ等しい。

[**証明**] S 系において、この事象 E(J) が起きた点を E とする。点 E から YZ 平面に垂線をおろした点を D と

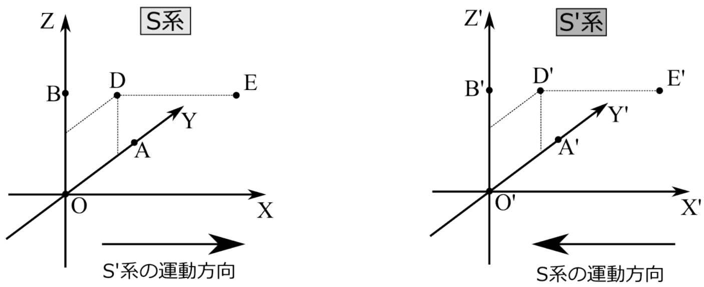


図 2.18

する (図 2.18)。点 D において、座標系を設定したときの事象 O(J) と同時に起きた事象を D(J) としよう。D(J) の S' 系での位置 D' も命題 6 より Y'Z' 平面に上にあり、かつ、y' 座標、z' 座標は、S 系のそれに等しい。直線 DE は S 系において X 軸に平行なので、直線 D'E' も命題 9 より、X' 軸に平行である。よって点 E' の y',z' 座標は点 D' のそれと等しい。よって点 E'、点 E の y 座標 z 座標はそれぞれ等しい。[**証明終**]

命題 7 と命題 10 より、今設定した座標系では光の軌跡の変換について以下のことが言える

命題 11（任意の方向の光の軌跡の変換規則）　長さ a、x,y,z 成分が b,c,d である光の軌跡は S' 系では

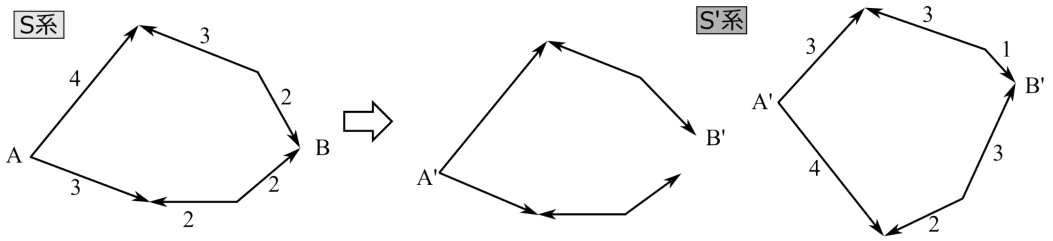
$$(\alpha R + L/\alpha\,,\,\alpha R - L/\alpha\,,\,c\,,\,d)$$

に変換される。ここで順番は、長さ、x',y',z' 成分である。又、$R=(a+b)/2,\quad L=(a-b)/2$ であり又 $\alpha=\sqrt{(1-v)/(1+v)}$ である。$a>0\,,\,b,c,d$ は任意とする。R,L,α を消去すれば

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\,a+\frac{-v}{\sqrt{1-v^2}}\,b,\quad \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}}\,a+\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\,b,\quad c,\quad d\right)$$

となる。

これで光の軌跡の変換則が完全にわかったわけである。第 2.2 節で述べたようにローレンツ変換は、光の軌跡の変換則を求めることに帰着する。つまり、任意の 2 つの事象の事象差の変換規則は、光の軌跡をつなぎ合わせた光の経路の変換を求めれば求まるわけである。



(a) (b) (c)

図 2.19

2.9.3　矛盾がないこと

ところで、上記命題 11 で述べられた変換規則が第 2 会合の原理などに矛盾しないかを確かめる必要がある。つまり、2 つの事象を 2 つの光の経路で表わしたとき、第 2 会合の原理で述べたように、この 2 つの経路の時間的距離が等しく、当然空間ベクトルも等しいわけであるが、これを上記命題 11 の方法で経路中の軌跡を変換したとき、この 2 つの光の時間的距離、空間ベクトルが、それぞれ等しくなるかということを確認する必要がある。これは、S 系において図 2.19(a) のように、点 A、点 B で起きた事象を 2 つの経路で表わしたとき、それぞれの光の経路を命題 11 の方法で S' 系に変換し、始点を合わせた場合、終点の位置が図 2.19(b) のように異なってしまわないか。又、終点は一致するが、それぞれの経路の時間的距離が図 2.19(c) のように異なってしまわないかということを確認したいわけである。つまり確認したいことは

確認すべきこと S 系における 2 つの経路の時間的距離と空間ベクトルがそれぞれ互いに等しいなら、命題 11 の変換規則で変換したとき、S' 系でも時間的距離と空間ベクトルがそれぞれ等しくなる。

ということである。それでは確認しよう。

空間ベクトルの y 成分については、変換によって値が変化しない。そして、S 系での 2 つの光の経路で空間ベクトルの y 成分の変化量は等しい。よって、変換後の 2 つの経路の y' 成分の変化量も互いに等しい。z 成分も同様である。次に時間成分と x 成分について考える。そのために、ある 1 つの光の経路 A→B が命題 11 の規則で、どう変換されるかを考えよう。簡単のため、その経路 A→B は、図 2.20 のように、3 つの直線で構成されているとしよう。そして、各光の軌跡は経路の向きと (1) 同じ (2) 逆 (3) 同じであり、(長さ、x 成分) がそれぞれ、

$$(a_1, b_1) \quad (a_2, b_2) \quad (a_3, b_3) \quad a_i > 0$$

だったとしよう。この経路の時間的距離は定義より $a_1 - a_2 + a_3$、空間ベクトルの x 成分は $b_1 - b_2 + b_3$ である。2 番目の軌跡の向きは逆行しているので符号をマイナスにしなければならないことに注意しよう。さて、

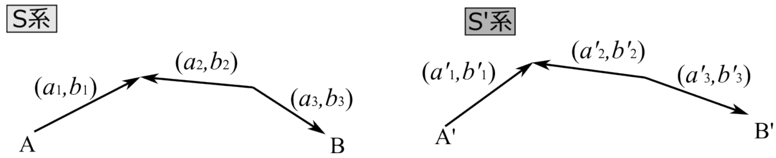


図 2.20

これを S' 系に変換すると、各軌跡は命題 11 より、

$$a'_i = Aa_i + Bb_i \quad b'_i = Ba_i + Ab_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

と変換される。ここで $A = 1/\sqrt{1-v^2}, \quad B = -v/\sqrt{1-v^2}$ と置いた。S' 系でのこの光の経路の時間的距離と空間ベクトルの x' 成分は、2 番目の軌跡は逆行していることに注意すると、

$$\begin{aligned} a'_1 - a'_2 + a'_3 &= A(a_1 - a_2 + a_3) + B(b_1 - b_2 + b_3) \\ b'_1 - b'_2 + b'_3 &= B(a_1 - a_2 + a_3) + A(b_1 - b_2 + b_3) \end{aligned} \tag{2.5}$$

となる。このように光の経路の S' 系における時間的距離、空間ベクトルの x' 成分ともに、S 系における時間的距離と x 成分の値だけで完全に決まる。今の場合、光の経路は 3 つの軌跡で構成されていたが、このことは何個の軌跡で構成されていても成り立つことは明らかであろう。S 系での 2 つの経路は、時間的距離も、空間ベクトルの x 成分も互いに等しい。ゆえに、それを変換した S' 系における時間的距離と空間ベクトルの x' 成分はそれぞれ等しくなる。以上より

命題 12 S 系における 2 つの光の経路を命題 11 の方法で S' 系に変換した場合、S 系で 2 つの経路の時間的距離と空間的ベクトルがそれぞれ互いに等しければ、S' 系でも時間的距離と空間的ベクトルがそれぞれ互いに等しくなる。

と言える。

さて、式 2.5 において $a_1 - a_2 + a_3$、$a'_1 - a'_2 + a'_3$ は各系における 2 つの事象の時間差 $\Delta t, \Delta t'$、$b_1 - b_2 + b_3$、$b'_1 - b'_2 + b'_3$ は各系における x 成分 $\Delta x, \Delta x'$ であった。今の場合は光の経路が 3 つの軌跡から構成されていたが、これが何個で構成されていようと式 2.5 は成り立つ。そして任意の 2 つの事象は、光の経路で表わすことができ、今確認したように、変換は一意であった。従って、任意の 2 つの事象の変換則について以下のことが言える。

命題 13（ローレンツ変換） S 系において任意の 2 つの事象の時間差、空間ベクトルの差が $(\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$ のとき S' 系では

$$\Delta t' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\Delta t + \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}}\Delta x \qquad \Delta x' = \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}}\Delta t + \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\Delta x \qquad \Delta y' = \Delta y \qquad \Delta z' = \Delta z$$

と変換される。座標系はこの節の最初に設定したものである。

以上で完全にローレンツ変換が求まったわけである。

付録 A

A.1　会合の原理と第 2 会合の原理の同等性の証明

A.1.1　(a) と (b) の同等性

　この付録で会合の原理 (a)、(b)、第 2 会合の原理 (a)、(b) という 4 つの原理の同等性を証明する。まず会合の原理 (a) と (b) の同等性を証明しよう。会合の原理をここに再掲すると

会合の原理
ある地点 A から光を 2 つの方向に同時に発し、その光が別々の経路を通って、ある同じ地点 B に到達したとき
(a)　2 つの経路の距離が等しいなら光は会合し、つまり同時に着き
(b)　距離が異なるなら会合しない、つまり同時に着かない

(a)→(b) **の証明**
例えば経路 (1) の方が経路 (2) より距離が短かったとしよう。経路 (1) の光は終点 B に着いた後、経路 (2) と距離が等しくなるように、寄り道して終点 B に戻ってきてもらおう。すると会合の原理 (a) より、寄り道後に、経路 (2) の光と会合する。ということは寄り道前には会合しなかったということである。**証明終**
(b)→(a) **の証明**
経路 (1) と経路 (2) の距離が等しいのに、経路 (1) の光が先に終点 B に着いたとしよう。それなら、経路 (1) の光に寄り道してもらい、ちょうど経路 (2) の光が終点に着く時に戻ってきてもらおう。すると、経路 (1) の光は寄り道した分だけ経路 (2) より長いのに終点で光は会合する。これは会合の原理 (b) に反する。ということは、距離が等しいときは会合するということである。**証明終**
次に第 2 会合の原理 (a)、(b) の同等性を証明する。証明法は今の場合と全く同じである。第 2 会合の原理をここに再掲すると

第 2 会合の原理
始点での事象が会合しており、終点の位置が等しい 2 つの光の経路は
(a)　その経路の時間的距離が等しいなら終点で会合し
(b)　等しくないなら会合しない

(a)→(b) の証明

例えば経路 (1) の方が経路 (2) より時間的距離が小さかったとしよう。経路 (1) の終点での事象の後、経路 (2) の時間的距離が等しくなるように、寄り道して終点 B に戻ってきてもらおう。すると第 2 会合の原理 (a) より、寄り道後に、経路 (2) の光と会合する。ということは寄り道前には会合しなかったということである。

証明終

(b)→(a) の証明

経路 (1) と経路 (2) の時間的距離が等しいのに、経路 (1) の終点の事象の方が先に起きたとしよう。それなら、経路 (1) の光に寄り道してもらい、ちょうど経路 (2) の終点での事象が起きるときに戻ってきてもらおう。すると、経路 (1) の光の時間的距離は寄り道した分だけ経路 (2) より長いのに終点で光は会合する。これは第 2 会合の原理 (b) に反する。ということは、時間的距離が等しいときは会合するということである。証明終

A.1.2　会合の原理を使って第 2 会合の原理の証明

会合の原理から第 2 会合の原理を証明するために、1 つの補題について述べよう。2 つの事象 A(J)、B(J) が図 A.1 のように光の経路 A→O→B で表わせたとしよう。光は AO では経路に逆行し、OB では順行していたとしよう。今、点 C を四角形 OACB が平行四辺形になるようにとろう。事象 A(J) と同時に光を点 A から点 C に発し、事象 B(J) と同時に光を点 B から点 C に発するとしよう。O→A→C と O→B→C は距離が等しいので、会合の原理 (a) より、光は点 C で会合する。つまり、この A(J)、B(J) という事象は光の経路 A→C→B で表わせるということである。軌跡の逆行と順行の順で構成されている光の経路は、各光の軌跡の向きと長さを変えないで順序を入れ替えて作った順行と逆行の順で構成されている光の経路で表わすことができるということである。又、その逆の順行と逆行の順で構成されている経路も順序を入れ替えた逆行と順行の軌跡で表わせるということでもある。又、会合の原理 (a) より、順行と順行の順で構成されている経路の順序入れ替えも可能であり、逆行と逆行の順序を入れ替えることも可能である。以上より

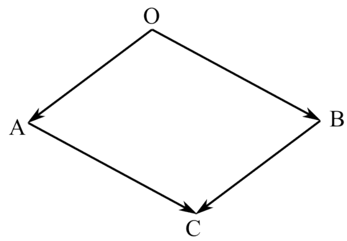


図 A.1

補題

2 つの事象が 2 つの光の軌跡で構成されている光の経路で表わせるとき、この 2 つの事象は、この軌跡の向きと大きさはそのままで順序のみを入れ替えた光の経路でも表わすことができる。

といえる。

さて、この補題を使って会合の原理から第 2 会合の原理を証明しよう。今、2 つの事象が 2 つの光の経路で表わせたとしよう。簡単のため、その経路は図 A.2 のようにそれぞれ 3 つの光の軌跡で構成されているとしよう。経路 (1) は光の軌跡の空間ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{H}_1}, \overrightarrow{\mathrm{H}_2}, \overrightarrow{\mathrm{H}_3}$ で、経路 (2) は $\overrightarrow{\mathrm{G}_1}, \overrightarrow{\mathrm{G}_2}, \overrightarrow{\mathrm{G}_3}$ で構成されているとしよう。そして、それぞれ 2 番目の光の軌跡が経路に逆行しているとしよう。経路 (1) の時間的距離は

$$|\overrightarrow{\mathrm{H}_1}| - |\overrightarrow{\mathrm{H}_2}| + |\overrightarrow{\mathrm{H}_3}|$$

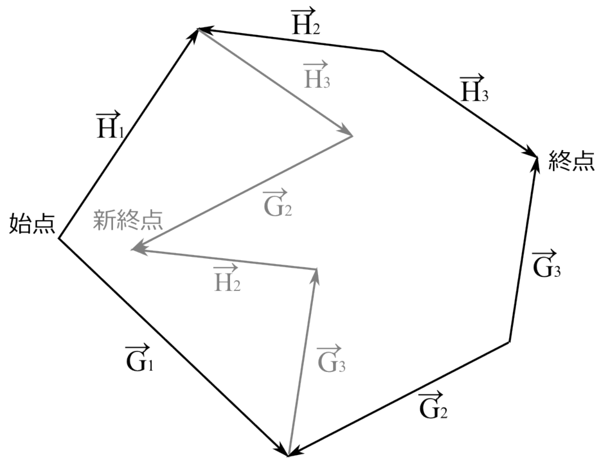


図 A.2

であり、経路 (2) の時間的距離は

$$|\overrightarrow{G_1}| - |\overrightarrow{G_2}| + |\overrightarrow{G_3}|$$

である。この光の経路は始点と終点で、もう一方の経路と会合しており、光の経路の折れ点では、光の経路の定義より、会合している。よって、この 2 つの光の経路をぐるっと一周して 1 つの光の経路と考えると、全ての折れ点で会合していることになる。補題より、となり合う光の軌跡は会合という事実を崩さずに交換できるので、順次交換を繰り返せば、この光の経路は折れ点での会合という事実を崩さずに、各軌跡を並べ替えることができる。それで、経路 (1) の逆行軌跡である $\overrightarrow{H_2}$ を経路 (2) の方にもっていこう。$\overrightarrow{H_2}$ は経路 (1) から見れば逆行しているが、経路 (2) から見れば順行しているからである。同じ理由で経路 (2) の逆行軌跡である $\overrightarrow{G_2}$ を経路 (1) にもっていこう。すると光の軌跡は、図 A.2 のように $\overrightarrow{H_1}, \overrightarrow{H_3}, \overrightarrow{G_2}$ と $\overrightarrow{G_1}, \overrightarrow{G_3}, \overrightarrow{H_2}$ という順行のみから構成できる。この新しい 2 つの光の経路は終点で会合しているので、会合の原理 (b) より距離は互いに等しくなければならない。すなわち

$$|\overrightarrow{H_1}| + |\overrightarrow{H_3}| + |\overrightarrow{G_2}| = |\overrightarrow{G_1}| + |\overrightarrow{G_3}| + |\overrightarrow{H_2}|$$

でなければならない。ということは、実は元の 2 つの経路の時間的距離が等しかった、つまり

$$|\overrightarrow{H_1}| - |\overrightarrow{H_2}| + |\overrightarrow{H_3}| = |\overrightarrow{G_1}| - |\overrightarrow{G_2}| + |\overrightarrow{G_3}|$$

であったということである。今の議論は、光の経路が 3 個の軌跡で構成されてなく、何個で構成されていても成り立つことである。よって、2 つの事象を 2 つの光の経路で表わせるなら、その 2 つの光の経路の時間的距離は等しくなければならないという第 2 会合の原理 (b) が証明されたことになる。会合の原理より、会合の原理 (b) が証明されたので、今までの議論より、会合の原理 (a)、(b)、第 2 会合の原理 (a)、(b) という 4 つの原理すべてが同等であることが証明されたことになる (図 A.3)。

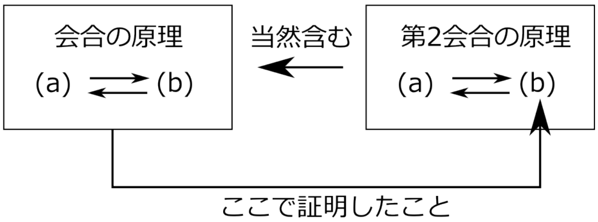


図 A.3

A.2　ガリレオ変換により、会合の原理が満たされなくなってしまうこと

この付録では、S 系で会合の原理を満たしているとき、その軌跡をガリレオ変換で S' 系に変換した場合、会合の原理を満たさないことを示す。座標系は第 2.9 節で設定したものを使う。S 系において、X 軸方向に光を発し、1m で反射して元の位置に戻る光の経路と、Y 軸の正の向きに光を発し 1m 進んで反射し元の位置に戻る光の経路を考える (図 A.4)。この光の軌跡を S' 系で考えよう。X' 軸の正の向きに進む光の軌跡は

$$1 - v$$

負の方向に進む光の軌跡は

$$1 + v$$

で計 2m である。一方 Y' 軸の正の向きに進む光は

$$\sqrt{1 + v^2}$$

負の向きに進む光も

$$\sqrt{1 + v^2}$$

計 $2\sqrt{1 + v^2}$ となり、2 つの光の移動距離が異なってしまう。

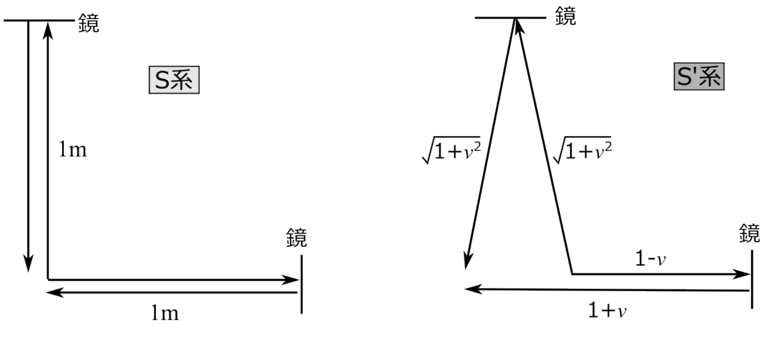


図 A.4

あとがき

このあとがきでは、いくつか思っていることを間違えを恐れずに書いてみたい。この論文では現象に違いがないなら同じことが起きるという対称性の原理を多く使って推論を行ってきた。しかし、このことは多少の注意を要すると思う。

私ごとだが、私は子供の頃、磁石というものが不思議でしょうがなかった。物は手を離すと下に落ちるのに磁石は上に磁石があれば、逆に上昇する。もっと不思議だったのは磁石と磁石の間に紙があっても、磁石は引き合うということであったような気がする。おそらく子供の頃は力は近接作用的に働き、間に紙があれば妨害されて力を及ぼせないと考えていたのだと思う。重力は力と考えていなかったであろうから、地球と物の間に紙があっても落ちるのは不思議には感じなかったのであろうが。話を元に戻すが、この磁石が上昇するということを対称性の原理から考察してみよう。

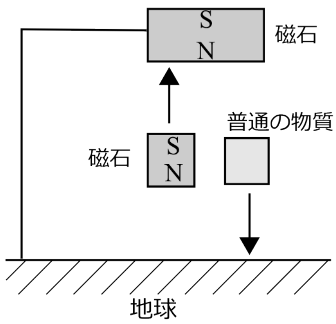


図 A.5

図 A.5 のように上に磁石をおいて、別の磁石の支えを離す。磁石というのは見た感じは他の金属と何ら変わりない。ゆえに、他の金属と同様、この物体も下に落ちると推論できる。区別のつかないときは同じことが起きるというのが対称性の原理であった。しかし、その推論は誤りであり、磁石は上昇する。

それからもう 1 つ述べておこう。昔は惑星の軌道は円を描くと考えられていたようだ。円は完全だからという理由であったらしい。詳しいことを語る知識がないので、これ以上は述べないが、例えば**惑星が太陽の周りを回る軌道は円でなければならない。なぜなら空間は等方的であり、太陽からある方向への距離が別の方向への距離より長くなる理由はないからである。**という主張も、それなりに説得力がある。しかし実際は楕円軌道であった。速度を忘れていたからである。ここで 2 つの簡単な例をあげてみたが、この対称性の原理による推論は誤りをもたらしやすいということを強調したい。そして、対称性による推論が誤っていたなら素直に原因を探るべきである。話は少し違うかもしれないが、宇宙には特別な物質があり、光はその物体に対してのみ一定の速度で動き、他の系への変換はガリレオ変換を満たすということが、想像はしずらいが、あっても論理的にはおかしくないと思っている。

その他いくつか気になることを書いておこう。

1. 会合の原理についてだが、ガリレオ変換では一方の系で会合の原理を満たしている場合、もう一方の系では会合の原理をみたさない。これがマイケルソンの実験がうまくいかなかった理由である。このことは付録 A.2 に載せておいた。
2. 時間が遅れるというのはいい表現ではない。単なるある系よりも別の系の方が光の軌跡が長いということであり、誤解を与えやすい。

3. 同じように物体が収縮するというのもいい表現ではない。収縮といえばまるで熱による収縮を想像してしまうが、これも、そういうものとは異質の測定の問題である。
4. 我々の時間感覚とこの論文で定義した時間とは合っているだろう。というのは、我々の肉体も光と同様、電磁気学の法則に従っているからである。
5. 概念・感覚を長さの概念に還元するのが物理学だが、別の概念・感覚に例えば音の大きさ、色などに他の概念（例えば長さ）を還元しても、原理的には物理学は構築できるであろう。たとえ、どんなに複雑になろうとも。
6. 一般相対性理論というのは複雑すぎる。本当に自然はあんなに複雑なのであろうか
7. 太陽系の重心に一定速度で動き、恒星系に関して回転していないのが慣性系であり、そのことを式に入れたのが一般相対性理論である。

もともと、時間を運動の比で表わすアイデアは私が 32 歳の（私は現在 40 歳と 9 カ月）とき、いまから 9 年近く前、時計や暦というものに興味をもって調べていたときに出てきたものだったと思う。昔のことなので、よく覚えていないが、時計や暦を調べていたのとは関係ないかもしれない。とにかく、それからずいぶんたってしまったが、今年の 2 月にガウス・クリューゲル法の論文を書き終わったとき、ローレンツ変換について考えていて、この論文にある α の導出法を思いついた。それで、ちょっとそのことをノートにまとめようかと思ったのだが、せっかくインターネットもあるしということで、こういう形にパソコンファイルにまとめて書いて公開しようと思ったわけである。正直言って、これでローレンツ変換というものがわかったと思った。いままでわかったような、わからないような時間が明確になった。もちろんまだまだ理解が不十分なところは多々ある。なにせ、長年染み付いた、時間は誰が見ても同じという直感はなかなかぬぐいされようがない。

この論文は結構楽しく書けた。とはいっても、何度も書き直していやにもなったが。そうだなあ、修士論文を書いたとき以来かな論文を書いて楽しいというのは。やはり、自分の思ったことを自由な形式で書くのは、疲れることだが、おもしろく、やりがいのあることだと再認識した。私もかっては雑誌に論文を書いたこともあるのだが、そのときは書いてて楽しくなかった。それは、レフリーの指示通りに論文を直すのが苦痛だったのだと思う。もう 12 年も昔のことだからよく覚えていないが。

今度はそうだな、量子力学の基礎か、このまま相対論をやって、相対論的運動学か、熱力学か統計力学のテーマで何か書いてみたいと考えている。

参考文献

[1] アウグスティヌス著　服部英次郎訳　「告白」　岩波文庫　1976 年
下巻 127 ページ（原本では第 11 巻第 23 章）に

わたしはかってある学者から日や月の運動がとりもなおさず時間であると聞いたが、それに同意しなかった

とある。また同本下巻　129 ページ（原本では第 11 巻　第 24 章）に

誰かが時間は物体の運動であるというものがある

とある。アウグスティヌスはその見解に反対している。アウグスティヌスはローマ時代末期（AD354-430）の神学者

[2] ニュートン著　「自然哲学の数学的諸原理」　河辺六男訳　世界の名著　中央公論社
65 ページに絶対時間についての記述がある。引用させてもらうと

絶対的な、真の、数学的な時間は、それ自身で、そのものの本性から、外界の何物とも関係なく、均一に流れ、別名を持続ともいいます。相対的な見かけ上の、日常的な時間は、持続の、運動による（精密にしろ、不精密にしろ）ある感覚的で外的な測度で、人々が真の時間のかわりに使っているものです。一時間とか、一日とか、ひと月とか、一年とかいうようなものです。

[3] マッハ著　「力学史」上下　ちくま学芸文庫　2006 年　原著初版は 1883 年　訳は第 9 版 (1933 年) による。
マッハによる時間の考察は上巻の 346 ページから 349 ページ「時間、空間、および運動に関するニュートンの説」の中にある。ほんの一部を引用すると

われわれは物の変化を、時間によって測定することは、決してできないのである。時間というものはむしろわれわれが物の変化によって得る一つの抽象である。というのは、全ての物は相互に関連し合っている故、決して一定の尺度がわれわれにしていされてはいないからである。等しい距離の増加が比較（の基準になる）運動（地球の回転）の示す等しい距離の増加に対応する。そのような運動を等速であるというのである。一つの運動が等速でありうるのは、他の運動に関連してのことである。運動それ自体が等速であるかどうか、という問題には意味がない。