

# 量子力学の原理を考える

2021年3月23日

# 序文

この論文は私が量子力学を理解しようとして考えたこと、主に基礎的問題や原理的問題について記述している。全体を2部に分け、第I部では量子力学の体系について書き、第II部で測定に関わることを書いた。第I部はそれなりに体系的にかかっているが、第II部はそうではない。量子力学の教科書を読むと、「エルミート演算子」やら「回転演算子」やら「物理量は演算子である」など、これが一体物理法則とどう関係があるのかわからない話で溢れている。わたしの目標はそういうものを廃して、自然法則としての量子力学を述べることである。つまりこういう状況ではこういうことが起きるとい現象の因果関係を述べることである。私は最初、確率振幅で状態は決まるというわけのわからない考えに悩み、状態とは何かと考えた。それは確率分布にほかならないと気づいた。確率分布を求めることが量子力学の計算なのだ。確率振幅や変換行列は確率分布を求めるための計算のための便宜なのである。

内容について簡単に述べよう。第I部は量子力学の体系について私なりに解釈して記述した。第1章では量子力学の最も基本的な原理について述べた。確率分布が物理的に意味のあるものであり、確率振幅、波動関数は確率分布の計算のための便宜であるという考えで書いた。第2章で確率振幅や変換行列の性質について述べた。同じ確率分布を表すにもいろいろな確率振幅と変換行列が存在する。時間発展方程式と確率振幅と変換行列の複素共役の関係についても言及した。第3章では、スピン1/2での変換行列を確率分布から求めた。これは第1章、第2章の応用になっている。第4章では、演算子を使って変換行列を求めた。要はこれが量子力学の肝であり、普通の教科書ではこれがメインで出てくるのだが、これはあくまで変換行列と確率振幅を求めるための1つの手段に過ぎないという考えで記述した。この方法で求めた変換行列を使うと、物理量の期待値の時間発展が古典力学の正準方程式と形式的に一致し、波束が十分小さいときは、実質的な意味で古典力学と一致する。このことがこの方法の正しさの根拠の1つになっている。その数学的な証明は次の第5章に残した。第5章では物理量の平均値の時間発展方程式が古典論と形式的に一致していることを数学的に証明した。まず、通常ハミルトニアンで、位置と運動量の平均値の運動方程式が形式的に正準方程式に一致することを示した。そして、磁場の存在する場合にも平均値の運動方程式が正準方程式に一致することを証明した。これは普通の教科書には出てないので価値があると思う。そして最後に、一般の物理量でも古典論と一致することを示している。これも普通の教科書には出てないので価値があると思う。ここでの古典論と一致というのは量子論の演算子の項が古典論と同じ項で構成されているという意味である。第5章はほとんど数学の話であり、物理的な話は出てこないのが気が向いたら読めばいいと思う。第1章と第4章が第I部の量子力学の体系としての中心部分であり、第2章はやや横道にそれた部分であり、第3章は応用的な話である。第5章は数学である。

第II部は測定に関係したことについて記述した。第6章では、測定とは位置、長さを測ることであるという私見を述べた。又、量子力学では如何にして位置の測定が行われるのかを紹介した。第7章では、一つの粒子の測定について考えた。それは値ごとに空間上分離して位置を測る方法しかないと思うのだが、その方法を運

動量とスピンについて考察した。測定値とは確率分布そのものだと考えるのが私はいいと思うのだが、波束の収縮によって値が選択されたとも考えられる。そこらへんは混乱しているのではないかと思う。第8章では観測問題について考察した。これは結局わからないことである。初期状態をどうやって知るかとともに量子力学の問題点である。第9章では、不確定性原理について述べた。不確定性原理というものは量子力学の法則から導き出せるものであり、そう重要な話では無いと思うのだが、多くの教科書に記述があるので、それらを批判するというを主な目的として、この論文でも記述することにした。第10章では統計力学のカノニカル分布での量子状態について、エネルギー固有状態にあるのではなく、その重ね合わせの状態にあるのではという私見を述べた。又、付録Aでは——この論文では必ずしも必要はないのだが——スピン演算子というものについて説明した。このスピン演算子を使って、付録Bでは、磁場中でのスピンに関するハミルトニアンについて述べた。これは通常の教科書では天下りの与えられているのだが、この論文の論旨に従った導出を試みた。このハミルトニアンを使って、付録Cでは、シュテルン・ゲルラッハの実験で波束が2つに分離することを量子力学の時間発展方程式を使って説明した。付録Dでは位置、運動量、角運動量、エネルギー演算子がエルミート演算子になることを示した。多くの教科書で記述があるので不要かもしれない。付録Eでは第4章で述べた演算子の固有値が実数になること、また固有ベクトルが直交することの数学的証明を述べた。これも多くの教科書にでているので不要かもしれない。論文の最後に「おわりに」というタイトルで量子力学の疑問点などについてざっくりばらんに私の考えを述べた。

量子力学の主張には無理があるのである。だからそれを明快に解説するのは——もちろん私の能力不足もあろうが——土台無理なのである。ただ書いてあることはほとんどが私が自分で考えたことであり、それなりの価値はあると思う。主張が明確なら、それを批判することも容易であるが、量子力学の場合、何を主張しているのか自体がよくわからないので、その批判も容易でないのである。

私にとって量子力学の勉強は苦痛でしかなかった。それでも、この論文を書いたことにより、少しわかるようになった。そして、少し楽しくなった。この論文に欠けているのは量子力学の体系の正しさを根拠付ける実験についてほとんど記述していないことであろう。それは単に私に説明できるほどの知識がないからである。それはあまりに膨大なことで手に余ることである。量子電磁気学や素粒子論についての記述もない。話は非相対論的なものに限定している。私にその知識がないからである。

2021年3月23日

## 記号・用語

この論文で使われている用語や記号について簡単に説明する。おおむね普通の文献と同じ用法を使ったが、通常は「固有状態」と言うところを「測定状態」という言葉を使っている。また「固有値」のことは「測定値」とか、「取りうる測定値」という言葉を使っている。その方が実態に合っていると思ったからである。位置や運動量などの連続変数を離散的に扱った。それは離散的な値しか現れないエネルギーや角運動量などと区別するのが面倒だからである。 $P(x)$  を位置の確率分布、 $P(p)$  を運動量の確率分布というように異なる確率分布に対して同じ  $P$  を使った。本来は  $P_x(x)$ 、 $P_p(p)$  など異なる関数ということ添え字などをつけて区別すべきなのだが、記号が煩雑になるので同じ記号を使い、変数記号の  $x$ 、 $p$  自体に意味を持たせた。一般に  $x$  は位置、 $p$  は運動量、 $\varepsilon$  はエネルギー、 $l$  は角運動量を指すのに使った。確率分布以外、例えば確率振幅などでも変数自体に意味をもたせた。以下、この論文で使われている用語とその意味を列挙する。

測定状態	固有状態のこと
測定値	固有値のこと
測定状態：	固有状態のこと
測定値	固有値のこと
測定変数	確率分布や確率振幅に現れる変数で、位置、運動量、エネルギー、角運動量などである。 測定変数と呼ぶ理由は、変数の取りうる値が測定値として現れるものだからである。
表示	例えば運動量表示と言え、ある状態を運動量の確率振幅で表しているという意味。
確率分布団	その系のすべての状態の確率分布のこと
$P(x, y, z; \lambda)$	状態 $\lambda$ での位置 $x, y, z$ の確率分布
$P(p_x, p_y, p_z; \lambda)$	状態 $\lambda$ での運動量 $p_x, p_y, p_z$ の確率分布
$\psi(x, y, z; \lambda)$	状態 $\lambda$ での位置 $x, y, z$ の確率振幅。一般に位置の確率振幅に関しては $\psi$ を使う。
$\varphi(p_x, p_y, p_z; \lambda)$	状態 $\lambda$ での運動量 $p_x, p_y, p_z$ の確率振幅。一般に位置以外の確率振幅に関しては $\varphi$ を使う。
$k(x; p)$	運動量の値 $p$ の測定状態 (固有状態) での位置 $x$ の確率振幅。 $k$ は固有状態の $k$ から取った。 一般に測定状態の確率振幅は $k$ を使う。
$\langle \quad \rangle$	平均。例えば $\langle p \rangle$ なら運動量 $p$ の平均値。
*	複素共役の記号。例えば $a^*$ なら $a$ の複素共役という意味。
†	転置共役の記号。例えば $U^\dagger$ なら $U$ の転置共役。

# 目次

序文	1
記号・用語	3
<b>第 I 部 量子力学の体系</b>	<b>7</b>
<b>第 1 章 量子力学の原理</b>	<b>8</b>
1.1 基本原理	8
1.2 確率振幅、変換行列の導入	10
1.3 エネルギーの確率振幅	11
1.4 角運動量の確率振幅	12
1.5 確率振幅、変換行列一般のこと	13
1.6 2 粒子以上の確率振幅	16
1.7 スピン変数も含めた確率振幅	17
1.8 時間発展方程式	18
1.9 測定変数の一部の測定	20
1.10 実験で確率分布を求めるに際しての困難	21
<b>第 2 章 変換行列と確率振幅の任意性 (様々な表現)</b>	<b>22</b>
2.1 任意性	22
2.2 確率振幅、変換行列は 2 つのグループに分かれること	24
2.3 ここまでのまとめと考察	26
2.4 時間発展方程式と 2 つのグループの関係	28
<b>第 3 章 スピン 1/2 での変換行列と確率振幅</b>	<b>32</b>
3.1 スピン状態の特徴	32
3.2 $z$ 方向の表示から $x$ 方向の表示への変換行列を求める	33
3.3 $z$ 方向から任意の方向への表示の変換行列	36
3.4 時間発展方程式との関係	39
3.5 まとめ	40
3.6 補足——変換行列と確率振幅の他の表現	40
<b>第 4 章 固有ベクトル法—固有ベクトルと変換行列</b>	<b>46</b>

4.1	演算子 . . . . .	46
4.2	固有ベクトル . . . . .	47
4.3	考察 . . . . .	50
4.4	固有ベクトル法による変換行列はなぜよいか . . . . .	52
4.5	古典力学が再現されているか . . . . .	54
<b>第 5 章</b>	<b>平均値と古典論の運動方程式の形式的一致</b>	<b>56</b>
5.1	平均値の運動方程式の一般形 . . . . .	56
5.2	平均値の運動方程式が正準方程式を満たすこと——磁場がない場合 . . . . .	58
5.3	磁場のある場合も正準方程式を満たすこと . . . . .	60
5.4	任意の物理量の平均値の時間発展式が古典論と一致すること . . . . .	65
<b>第 II 部</b>	<b>量子力学における測定</b>	<b>71</b>
<b>第 6 章</b>	<b>位置の測定</b>	<b>72</b>
6.1	測定とは位置、長さを測ること . . . . .	72
6.2	粒子検出装置 . . . . .	73
6.3	粒子検出の意味 . . . . .	74
6.4	位置の測定精度には限界があるか . . . . .	75
6.5	量子論での運動量、エネルギーなどは何を意味するか . . . . .	76
<b>第 7 章</b>	<b>1 粒子の物理量の測定</b>	<b>77</b>
7.1	測定パターン . . . . .	77
7.2	運動量、スピンの測定 . . . . .	78
7.3	スリット通過時に古典論に入るのは正しくない . . . . .	79
7.4	検出までを量子力学で扱う（運動量） . . . . .	81
7.5	多くの粒子で実験する場合 . . . . .	84
7.6	運動量測定状態への収縮 . . . . .	85
7.7	検出までを量子力学で扱う（スピン） . . . . .	87
7.8	まとめ . . . . .	92
<b>第 8 章</b>	<b>観測問題</b>	<b>94</b>
8.1	観測問題とは . . . . .	94
8.2	解決策を考える . . . . .	95
<b>第 9 章</b>	<b>不確定性原理</b>	<b>98</b>
9.1	不確定性定理 . . . . .	98
9.2	不確定性原理の意味 . . . . .	100
9.3	ハイゼンベルクの顕微鏡 . . . . .	102
9.4	分解能 . . . . .	104
9.5	考察 . . . . .	105

9.6	回析のため断定はできない . . . . .	108
9.7	まとめ . . . . .	109
第 10 章	カノニカル分布での量子状態	111
付録 A	スピン演算子	113
付録 B	磁場中のスピンハミルトニアン	116
付録 C	スピン磁気モーメントを持つ粒子が磁場中で 2 つに分かれること	120
付録 D	演算子のエルミート性	123
付録 E	固有値が実数であること、固有ベクトルが直交すること	125
おわりに		126
	疑問点、問題点 . . . . .	126
	量子力学はどういう意味で正しいか . . . . .	128
	決定論に移るためには . . . . .	128

## 第I部

# 量子力学の体系



# 第 1 章

## 量子力学の原理

この章では量子力学の基本原則を述べる。通常の量子力学の体系とは異なる記述の仕方をしているが、私が量子力学を解釈して、これがその意味しているところだろうと思うところを書いた。確率振幅というのは計算のための便宜であり、確率分布こそが物理的意味のあるものだということを強調した。確率分布というものの存在自体にも大いに疑問を感じるが、そこで止まっても先に進まないで、とりあえず量子力学の体系というものを述べた。

### 1.1 基本原則

量子力学の原則を古典力学と対比して述べたい。今、一つの粒子がポテンシャル中を運動しているとする。説明をわかりやすくするため、スピンは無視する。古典力学では、最初の位置と運動量が与えられれば、その後の運動は完全に決まる。量子力学では最初の位置の確率分布と運動量の確率分布が与えられれば、その後の位置の確率分布と運動量の確率分布が完全に決まる。位置の確率分布とは、簡単に言えば、実際に位置を測ってある位置で粒子を見出す確率のことである。運動量の確率分布についても同様。量子力学ではあるゆる瞬間で、位置や運動量、エネルギーなどの物理量の確率分布を持っている。私の目の前に鉛筆があり、その中には電子がある。その電子が今のような確率分布の状態にあるかを私は知らない。しかし私が知っていようが知るまいがこの電子には確率分布が付随しているということである。そして測定したら、その測定値を見出す確率はその確率分布に従うということである。ここらへんには疑問を感じるが、量子力学の体系ではそういうことになっている。

古典力学では位置と運動量が定まれば、他の物理量は定まる。単に位置と運動量の関数だからである。一方、量子力学では位置の確率分布と運動量の確率分布が定まれば他の物理量の確率分布も定まる。その結果として、位置の確率分布と運動量の確率分布が与えられれば、その後の他の物理量の確率分布の時間発展も一意的に決まる。古典力学では系の状態という言葉はあまり使わないが、量子力学では常に登場する。量子力学で使う「系の状態」というのも、普通の意味と同じであり、文脈によって意味も異なったりするが、ここでは「ある状態 A とある状態 B は同じ状態だ」といえば、それは位置や運動量などすべての物理量の確率分布が A と B で等しい場合であるとする。位置の確率分布と運動量の確率分布で他の物理量の確率分布も定まるので、系の状態は位置の確率分布と運動量の確率分布で定まると言える。

測定的时候は、確率分布の時間発展は一意的には決まらない。例えば位置を測るとする。どこで粒子を見出すことができるかは、確率的にしかわからない。そして、ある A というところで検出したとしよう。すると位置の確率分布は、A だけが 0 でない確率分布に瞬間的に移る。というのはもし、A で検出された直後に再び位

置を測れば、当然 100 % の確率で A で検出されるはずだからである。これは測定後には A だけが 0 でない確率分布にあるという意味に他ならない。位置の確率分布の突然の変化に伴い、運動量の確率分布も変化する。どう変化するかはおおいおい述べていくが、運動量はどの値も等しい確率分布になる。他の物理量を測っても、測定値だけが 0 でない確率分布に移り、その他の物理量の確率分布もそれに応じて変化する。測定値だけが 0 でない確率分布となる状態のことを測定状態と呼ぶことにする。エネルギーを測って測定値が 100 ジュールだったら、状態はエネルギー 100 ジュールの測定状態に飛び移るし、この粒子は今、エネルギーが 100 ジュールの測定状態にあるといえば、エネルギーを測れば必ずエネルギーは 100 ジュールになる。

古典力学では測定値は連続であるが、量子力学では測定値は必ずしも連続ではない。角運動量の測定値は常に飛び飛びであるし、束縛状態のエネルギーも飛び飛びの測定値しか現れない。以上まとめると

【原理 1】あらゆる瞬間で、物理量の、どの測定値が得られるかについての確率分布が存在する。

【原理 2】位置の確率分布と運動量の確率分布で他の物理量の確率分布も定まる。

【原理 3】確率分布の時間発展は、測定時を除いて、現在の確率分布から一意的に決まる。

【原理 4】測定すると、その物理量の確率分布は、測定値だけが 0 でない確率分布に瞬間的に移る。この状態を測定状態という。

【原理 5】測定値は必ずしも連続ではない。

量子力学の体系自体は難しくない。各物理量に対して確率分布が存在し、それが一意的に時間発展する。現在が未来を決める。その時間発展方程式は書き下すことができない程ややこしい。しかしながらややこしいと言っても、古典力学でも現実の系を扱うのは、静的であれ動的であれ、きわめて煩雑なのであり、教科書に出てくるものは、理想化した例なのである。あと知らなければならないことは

1. 確率分布の時間発展は一意的といっても具体的にはどんな方程式なのか。
2. 位置と運動量の確率分布で他の物理量の確率分布も決まるといえるが、具体的にはどういう関係にあるのか。又、位置と運動量の確率分布には関係はあるのか。
3. 測定時には、その物理量は測定値のみ 0 でない確率分布に移るとして、他の物理量はどのような確率分布に移るか。
4. 測定値は飛び飛びの値のときもあるというが、どんな値が現れるのか。

である。これらのことを、実験的にしろ、合理的推論にしろ、見出すことである。

尚、ここで述べた原理は電子などの物質粒子を想定して述べている。私は量子電磁気学の知識がないので、なんとも言えないが、量子電磁気学などでは「位置と運動量の確率分布で状態が決まる」というのは当てはまらないのかもしれない。素粒子論などは全く知識がないのでなんとも言えない。量子電磁気学は私も勉強してみたことはあるのだが、何か、物理的意味のわからない計算ばかりで、これをいくら学んでも自然現象を理解することはできないと思いやめてしまった。

測定の結果が確率でしかわからないと考えるのは、粒子が波動として行動し粒子として検出されるからである。物質を結晶にぶつけて散乱させると干渉模様が見られる。物質は波動として行動するのである。一方精密に実験すれば物質は 1 つ 1 つの塊として検出される。ミリカンの電子の電荷の測定などもその一例だろう。干渉模様も弱い波動で実験すれば、粒子がポツンポツンと来る。

測定をすると確定値をとるとして話をしてきたが、実際は測定値には幅がある。となると例えば位置の  $x$  座標を測定してある点から 10nm~20nm の範囲にあるという結果を得たら、位置の確率分布はその範囲は 0 で

なく、その範囲外は0という状態に飛び移るだろう。しかし 10nm~20nm の間でも確率分布が図 1.1 の左図

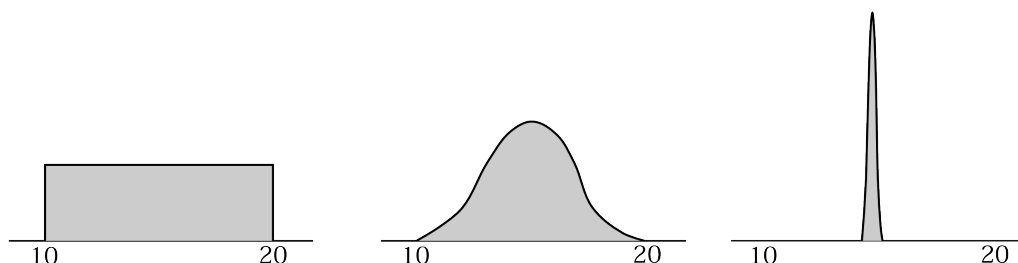


図 1.1 10nm~20nm の範囲で粒子を検出した直後の確率分布の想像図

のようになるか、真ん中の図のようになるか、又は右図のようになるのかは、これだけの測定結果だけでは何も言えない。量子力学はそのことについて何も述べていないのである。

さて確率分布は時間発展方程式に従うが、測定ときは従わないと述べた。しかし、測定という行為も自然現象の1つである。それなのになぜ、測定するときもその時間方程式に従わないのか。これはどう考えても筋が通っていないのである。この問題を観測問題という。ファインマンの本などでは、別に矛盾はないような書き方をしているが、それは、あまり考えてないか、知的誠実さに欠けているのである。観測問題については一応第8章で考察しているが、結局はわからないことである。

## 1.2 確率振幅、変換行列の導入

今から確率振幅という、物理的意味のわかりづらいものを導入する。確率分布のまま扱うと、時間発展方程式が煩雑になり、又、物理量間の確率分布の関係が煩雑になる。そのための計算の便宜として確率振幅というものを導入する。我々は任意の物理量での確率振幅を見出したいのだが、

**【確率振幅の定義】** ある物理量の確率振幅とは、その絶対値の2乗がその物理量の確率分布に等しく、他の物理量の確率振幅とはユニタリー変換で結ばれるもの

である。そういうものを導入したいのである。

簡単のため1粒子の系を考え、スピンは無視しよう。状態を指標  $\lambda$  で区別する。まず、位置と運動量の確率振幅を導入しよう。任意の状態  $\lambda$  での位置の確率分布  $P(x, y, z; \lambda)$  と運動量の確率分布  $P(p_x, p_y, p_z; \lambda)$  に対して\*1、絶対値の2乗が確率分布に等しく、互いに線形変換で結ばれている確率振幅というものが存在する。正確に言うと

$$P(x, y, z; \lambda) = |\psi(x, y, z; \lambda)|^2 \quad P(p_x, p_y, p_z; \lambda) = |\varphi(p_x, p_y, p_z; \lambda)|^2 \quad (1.1)$$

$$\psi(x, y, z; \lambda) = \sum_{p_x, p_y, p_z} U(x, p_x)U(y, p_y)U(z, p_z)\varphi(p_x, p_y, p_z; \lambda) \quad (1.2)$$

という関係を満たす状態  $\lambda$  ごとの関数  $\psi(x, y, z; \lambda)$ ,  $\varphi(p_x, p_y, p_z; \lambda)$  とユニタリー行列  $U(x, p_x)$ ,  $U(y, p_y)$ ,  $U(z, p_z)$  が——不思議なことに——存在する。ここで、 $\sum_{p_x, p_y, p_z}$  は  $p_x, p_y, p_z$  の取りうる値すべてで取ると

\*1  $P(x, y, z)$  と  $P(p_x, p_y, p_z)$  は同じ  $P$  を使っているが、異なる関数である。本来は  $P_x(x, y, z)$ ,  $P_p(p_x, p_y, p_z)$  などと区別すべきなのだが、それだと記号が煩雑になってしまうので同じ記号を使った。今後も誤解が生じないと思われるところでは、このように使われている変数で関数自体を区別することにする。

いう意味。今後もそういう意味で使う。この  $\psi(x, y, z; \lambda)$ ,  $\varphi(p_x, p_y, p_z; \lambda)$  は状態ごとに異なり、複素数である。  $U(x, p_x)$ ,  $U(y, p_y)$ ,  $U(z, p_z)$  は状態にはよらない。この  $\psi(x, y, z; \lambda)$  を位置の確率振幅という。いわゆる波動関数というものである。  $\varphi(p_x, p_y, p_z; \lambda)$  を運動量の確率振幅という。  $U(x, p_x)$  は運動量  $p_x$  から位置  $x$  成分への変換行列という。変換行列がユニタリーであることから、逆変換は

$$\varphi(p_x, p_y, p_z; \lambda) = \sum_{x, y, z} U^*(x, p_x) U^*(y, p_y) U^*(z, p_z) \psi(x, y, z; \lambda) \quad (1.3)$$

となる。尚、第 4 章でも述べるが、規格化定数を除いて

$$U(x, p_x) = \exp(ip_x x / \hbar)$$

である。ここで  $\hbar$  はプランク定数を  $2\pi$  で割ったもの。確率振幅自体は確率分布の平方根なので存在するに決まっているが、2つの確率振幅が線形変換で結ばれているのは実に不思議な話である。この2つの式を満たすものが存在するというのは、確率分布の性質であり、一種の自然法則である。このように変換行列が存在することは、位置の確率分布と運動量の確率分布は両方が任意の確率分布をとることができるわけではなく、互いに関係を持つということの意味する。そして変換行列が  $U(x, p_x) = \exp(ip_x x / \hbar)$  であることから、いわゆる不確定性原理が成り立つことになる。このことについては第 9 章で論じる。

(1.1), (1.2) を満たす確率振幅と変換行列は無限にある。それは簡単に言えば、(1.1), (1.2) を満たす確率振幅に絶対値 1 の複素数を掛けても (1.1) は満たされ、それに合わせて、変換行列も変えればいいからである。又、(1.1), (1.2) を満たす確率振幅と変換行列の複素共役も (1.1), (1.2) を満たすからである。詳しくは第 2 章で論じる。

尚、ここでは本来は連続量として扱わなければならない量を離散化して扱った。積分記号で表さなければいけないところを和で表した。測定変数は飛び飛びの時もあり、別々に扱うのが面倒なので、今後も原則、連続変数も離散化して扱うことにする。元々連続などというのは、空間や物体がいくらでも細かく分割できるという観察から——この観察自体が、せいぜい人間の目の見える範囲程度で行われたことだろうが、今はもちろん技術的に人間の目より細かく分割できるが——生じた空想である。離散化されたものの極限が連続なのだから、物理では何でも離散化すればいいのである。連続というのは一種の理想化である。

さて、今位置の確率振幅  $\psi(x, y, z)$  が与えられると  $|\psi(x, y, z)|^2$  によって位置の確率分布がわかることになる。又 (1.3) によって運動量の確率振幅がわかり、運動量の確率分布もわかる。ということは位置の確率振幅が与えられれば、位置の確率分布と運動量の確率分布の両方がわかり、ということは状態がわかるということである。これは運動量の確率振幅でもいえることで、運動量の確率振幅が与えられれば状態は決まる。

### 1.3 エネルギーの確率振幅

位置や運動量だけでなく、あらゆる物理量で、その絶対値の 2 乗が確率分布に等しく他の物理量の確率振幅とユニタリー変換で結ばれる確率振幅が存在するのだが、それは今求めた位置の確率振幅から必然的に——位相の任意性はあるが (第 2 章参照)——決まってしまう。

まずエネルギーの確率振幅について述べよう。(1.1), (1.2) を満たすあらゆる状態  $\lambda$  での位置の確率振幅があるわけだが、その状態  $\lambda$  が、エネルギーの値が  $\varepsilon$  の測定状態であるときの、位置の確率振幅を  $k(x, y, z; \varepsilon)$  だとしよう。同じエネルギー値の測定状態で 2 つ以上の独立な位置の確率振幅がある場合があるが——その場合、そのエネルギーは縮退しているという——記号が煩雑になるだけで何も本質的なことは変わらないの

で、縮退していないとする。この  $k(x, y, z; \varepsilon)$  は不思議なことに必ずユニタリ行列となる。つまり

$$\sum_{x, y, z} k^*(x, y, z; \varepsilon) k(x, y, z; \varepsilon') = \delta_{\varepsilon \varepsilon'}$$

である。これも確率分布のもつ性質の1つであり、自然法則の1つである。この  $k(x, y, z; \varepsilon)$  と状態  $\lambda$  での位置の確率分布  $\psi(x, y, z; \lambda)$  を使って任意の状態  $\lambda$  でのエネルギーの確率振幅を

$$\varphi(\varepsilon; \lambda) \equiv \sum_{x, y, z} k^*(x, y, z; \varepsilon) \psi(x, y, z; \lambda) \quad (1.4)$$

と定義\*2する。すると不思議にもエネルギーの確率振幅の絶対値の2乗はエネルギーの確率分布に等しくなる。式で書くと

$$P(\varepsilon; \lambda) = |\varphi(\varepsilon; \lambda)|^2$$

となる\*3。これも確率分布の持つ物理的性質についての量子力学の主張であり、数学的事実ではない。尚、逆変換は

$$\psi(x, y, z; \lambda) = \sum_{\varepsilon} k(x, y, z; \varepsilon) \varphi(\varepsilon; \lambda)$$

である。エネルギーの確率振幅がこの関係で位置の確率振幅と関係づけられているということは、エネルギーの確率振幅が定まれば、位置の確率振幅が定まる。ということはエネルギーの確率振幅が与えられた場合でも状態は定まるということである。

#### 定義の理由

エネルギーの確率振幅を (1.4) のように定義した理由を述べよう。変換行列の成分というものは、線形代数でおなじみのことだが、変換される側の基底を変換後の基底で表したものである。だから、エネルギーから位置への変換行列は、エネルギーの確率振幅の基底を位置の確率振幅で表したものとなる。ところで、エネルギー  $\varepsilon$  の測定状態では、エネルギーの確率分布は  $\varepsilon$  のみ1で他では0なので、確率振幅の絶対値の2乗がその確率分布に等しくなるためには、確率振幅も  $\varepsilon$  のみ1で他では0とすれば良い。ということはエネルギー測定状態がエネルギーの確率振幅の基底だということになる。つまり、エネルギーから位置への変換行列は、エネルギーの測定状態を位置の確率振幅で表したものになる。それゆえ、エネルギーから位置への変換行列は  $k(x, y, z; \varepsilon)$  となる。この逆行列でエネルギーの確率振幅を定義したのである。このようにある必然性を持って定義したのだが、任意の状態で確率振幅の絶対値の2乗が確率分布と等しくなるという必然性はないわけで、もし本当に実験的にそれが成り立つなら、これは驚きであり、確率分布にそういう性質があるということである。

## 1.4 角運動量の確率振幅

他の確率振幅もエネルギーのときと同様に定義する。しかし位置の一部としか変換しない物理量もある。それでそういう例として角運動量の  $z$  成分の確率振幅の導入の仕方を述べよう。状態  $\lambda$  での位置の確率振幅を極座標  $r, \theta, \phi$  で  $\psi(r, \theta, \phi; \lambda)$  と表そう。必ずしも極座標で表す必要はなく、要は  $\phi$  とその他の座標で表せばい

\*2 位相の任意性があるので、これは無数にあるエネルギーの確率振幅のうちの一つである。第2章参照。

\*3 尚、縮退している場合は、縮退しているものを合わせたものが確率分布に等しくなる。

いのだが、極座標が馴染み深いのでそうしただけである。角運動量の  $z$  成分の値が  $l_z$  である測定状態を位置の確率振幅で表すと、 $l_z$  に依存する  $\phi$  の関数  $k(\phi; l_z)$  と  $r$  と  $\theta$  の任意の関数  $f(r, \theta)$  との積となる。つまり

$$k(\phi; l_z) \cdot f(r, \theta)$$

となる。これも確率分布の性質を表す自然法則の一つである。これは  $\phi$  の部分以外は任意の関数で良いということである。 $k(\phi; l_z)$  はエネルギーのときと同様にユニタリ行列となる。この  $k(\phi; l_z)$  と位置の確率振幅  $\psi(r, \theta, \phi; \lambda)$  を使って、任意の状態  $\lambda$  での角運動量の値が  $l_z$  の確率振幅を

$$\varphi(r, \theta, l_z; \lambda) \equiv \sum_{\phi} k^*(\phi; l_z) \psi(r, \theta, \phi; \lambda)$$

と定義する。不思議なことにこの確率振幅の絶対値の 2 乗も——エネルギーのときと同様に——確率分布と等しくなる。つまり式で書くと

$$P(r, \theta, l_z; \lambda) = |\varphi(r, \theta, l_z; \lambda)|^2$$

となる。逆変換は

$$\psi(r, \theta, \phi; \lambda) = \sum_{l_z} k(\phi; l_z) \varphi(r, \theta, l_z; \lambda)$$

となる。 $\phi$  以外は変換されないで、これらの式を簡略化して書くと

$$\varphi(l_z; \lambda) \equiv \sum_{\phi} k^*(\phi; l_z) \psi(\phi; \lambda) \quad P(l_z; \lambda) = |\varphi(l_z; \lambda)|^2 \quad \psi(\phi; \lambda) = \sum_{l_z} k(\phi; l_z) \varphi(l_z; \lambda)$$

ということである。他の物理量も同様に定義される。そうは言っても量子力学で頻繁に出てくる物理量はあと角運動量の 2 乗くらいしかない。具体的な変換行列については第 4 章を見て欲しい。

## 1.5 確率振幅、変換行列一般のこと

基本的には、ある一つの物理量の確率振幅で状態は決まる。位置の確率振幅でも状態は決まるし運動量でも決まる。エネルギーでも決まるが、角運動量の確率振幅は位置座標の一部としか変換しないので系の状態は決まらない。しかし、その変数の部分の状態は決まる。状態を位置の確率振幅で表すとき位置表示といい、運動量の確率振幅で表せば運動量表示という。この言い方は線形代数学での使い方と同じである。

確率振幅と変換行列についてのいろいろな性質を述べてきたが、確率振幅が線形変換で結ばれるとか、その変換がユニタリであるなどは、自然界に現れる確率分布の性質を述べているのであって、数学的な事実ではない。確率振幅の変換は線形変換なので、線形代数学の知識が大いに役立つ。数学の線形代数学と違うところは変換行列が積の形になっている場合があること、ベクトルの大きさが 1 のもの限定していること、それと、これは第 2 章で述べるが、同じ状態でもそれを表す確率振幅がいくつもあることなどである。確率振幅は数学でいうベクトル空間にはならないが、線形代数学での使える定理はたくさんある。

確率振幅の導入の仕方は少し分かりづらい説明になってしまった。1 つには私の理解が浅いこともあるのだが、もう一つには、確率振幅、変換行列というものが物理的に極めて不自然だからであろう。任意の物理量  $B$  の状態  $\lambda$  の確率分布  $P(b; \lambda)$  に対し、確率振幅というものが存在するのだが、それは絶対値の 2 乗が  $P(b; \lambda)$  に等しく、他の物理量の確率振幅とユニタリ変換で結ばれる<sup>\*4</sup>ものである。そして変換行列と確率振幅は、

<sup>\*4</sup> 補足しておく、確率振幅の変換において、測定変数は他のすべての測定変数と変換するわけではない。 $x$  は  $p_x$  とは変換するが、 $p_y$  とは変換しないし  $l_z$  とも変換しない。では、どういふ変数どういふが変換するかと言うと、その答えは——本来は実験的に見いだされるべきなのだが——第 4 章で述べる固有ベクトル法にある。

位置と運動量の確率振幅をその確率分布から定めてしまえば、自動的に定まるわけである。だからこそ私は【原理 2】のように、位置と運動量の確率分布が定まれば、他の物理量の確率分布も定まるであろうと考えたわけである。では、最初に位置とエネルギーの確率分布から確率振幅を決め、それから運動量などの確率振幅を決めていく方法は可能なのだろうか。これについては、そういうことができる系もあるが、できない系もあるというのが答えである。できない系というのは、位置とエネルギーの確率分布からだけでは状態が決まらない系——いわゆるエネルギーが縮退している系——である。状態が決まらないのに、その確率分布から、状態が決まってしまう確率振幅を定めることはできない。これは古典力学でも同じことであり、例えば自由粒子の系では、同じ運動エネルギーでも向きが異なる状態が無限にある。

### いくつかの命題

ここでいくつかの命題を証明しておこう。

**命題 1.1** 測定値  $a'$  の測定状態での物理量  $A$  の確率振幅  $k(a; a')$  は、測定値  $a'$  のみ 1 で他は 0 とすればよい。つまり

$$k(a; a') = \delta_{aa'}$$

とすればよい。測定状態はその表示での基底となるということである。

これはエネルギーの確率振幅の定義の理由のところ (1.3 節) で既に述べたが、改めて証明しておこう。

【証明】測定値が  $a'$  の測定状態での物理量  $A$  の確率分布  $P(a; a')$  は

$$P(a; a') = \delta_{aa'}$$

である。だから測定値が  $a'$  の測定状態の確率振幅は、その絶対値の 2 乗が確率分布に等しくなるためには、

$$k(a; a') = \alpha \cdot \delta_{aa'}$$

でなければならない。ここで  $\alpha$  は絶対値が 1 の任意の複素数である。2.1 節で述べるが、確率振幅の位相は自由に変えることができるので  $k(a; a') = \delta_{aa'}$  とすることができる。【証明終】

**命題 1.2** 物理量  $B$  から物理量  $A$  への変換行列  $U(a, b)$  は、測定値  $b$  の測定状態での物理量  $A$  の確率振幅  $k(a; b)$  に等しい。つまり

$$U(a, b) = k(a; b)$$

である。変換行列は、変換される側の測定状態を変換後の確率振幅で表したものである。

これもエネルギーの確率振幅の定義の理由のところ (1.3 節) で既に述べたが改めて証明する。

【証明】線形代数学でよく知られているように、変換行列  $U(a, b)$  は、変換される側である  $B$  の基底を、変換後の  $A$  の基底で表したものであるが、その物理量  $B$  の基底は、命題 1.1 より、その測定状態である。だから  $B$  の基底を  $A$  で表したものは、 $B$  の測定状態での  $A$  表示である  $k(a; b)$  である。【証明終】

**命題 1.3** 物理量  $B$  から物理量  $A$  への変換行列  $U(a, b)$  の絶対値の 2 乗は、測定値  $b$  の測定状態での物理量  $A$  の確率分布  $P(a; b)$  に等しい。つまり

$$|U(a, b)|^2 = P(a; b)$$

である。変換行列の絶対値の 2 乗は、変換される側の測定状態での変換後の物理量の確率分布ということである。

【証明】命題 1.2 より  $U(a, b) = k(a; b)$  であるが、これの絶対値の 2 乗をとり、 $|k(a; b)|^2 = P(a; b)$  であることを考慮すればよい。【証明終】

**命題 1.4** 物理量  $B$  の測定値  $b$  の測定状態にあるとき、物理量  $A$  を測り、測定値が  $a$  である確率  $P(a; b)$  はその逆の確率、すなわち、物理量  $A$  の測定値  $a$  の測定状態にあるとき、物理量  $B$  を測り、測定値が  $b$  である確率  $P(b; a)$  に等しい。つまり

$$P(a; b) = P(b; a)$$

である。

【証明】変換行列はユニタリーなのだから  $U^*(a, b) = U(b, a)$  である。この絶対値の 2 乗を取れば  $|U(a, b)|^2 = |U(b, a)|^2$  である。そして命題 1.3 より、 $|U(a, b)|^2 = P(a; b)$ 、 $|U(b, a)|^2 = P(b; a)$  だからである。【証明終】

ユニタリー変換である必要はあるか

変換行列はユニタリーとなる必然性はあるのだろうか。これはないと思う。線形代数学でよく知られているように、変換行列がユニタリーであることは、ベクトルの大きさが変換によって変わらないための必要十分条件である。今の場合、それぞれの物理量でのすべての測定値での確率の和（全事象）が変わらないということである。しかし全事象の確率は物理量ごとに異なっても構わない。例えばある状態で位置の確率振幅の絶対値の 2 乗の和が 3 で、それを変換行列でエネルギーの確率振幅に変換した結果、エネルギーでの和が 10 だったとしよう。ある位置を取る確率と、あるエネルギーを取る確率とを、これでは比べられないではないかと思うかもしれないが、全事象の確率で割ればいいだけなのである。位置の確率は 3 で割り、エネルギーの確率は 10 で割ればいいだけなのである。そうすれば比較に意味がある。だが自然はユニタリーを選んでということである。ユニタリー行列であることによる重要な帰結は、命題 1.4 に記したように、測定状態  $a$  のときに測定値  $b$  を取る確率と、その逆の測定状態  $b$  のときに測定値  $a$  を取る確率が等しいことである。つまり

$$P(b; a) = P(a; b)$$

となることである。

確率振幅の変換と単なる測定変数の変換を混同してはならない

尚、位置の確率振幅を直交座標  $x, y, z$  を測定変数として  $\psi(x, y, z)$  と表していたものを、極座標で  $\psi(r, \theta, \phi)$  と表すのに変えることは確率振幅の変換ではない。単なる測定変数の名称の変更である。空間座標を回転させて新たな直交座標  $x', y', z'$  で確率振幅を  $\psi(x', y', z')$  と表すのも確率振幅の変換ではない。これも単なる名称の変更である。運動量の確率振幅においても  $\varphi(p_x, p_y, p_z)$  と表していたものを、空間座標を回転させて新たな直交座標での運動量  $p'_x, p'_y, p'_z$  で  $\varphi(p'_x, p'_y, p'_z)$  と表しても、これは単なる名称の変更である。2 粒子系など



で、それぞれの粒子の直交座標から相対座標、重心座標にして位置の確率振幅を表すのも、直交座標から極座標へ移すのと同様、名称の変更であり、確率振幅の変換ではない。

## 1.6 2 粒子以上の確率振幅

今まで 1 粒子の系を扱ってきたが、実際の世界は無数の粒子が相互作用し合っている。今まで確率分布  $P(x, y, z)$  などとしてきたが、これは正確ではない。実際は周りの粒子の変数も加えなければならないし、本当は全宇宙の粒子を加えなければならない。  $P(x, y, z)$  として意味を成すのは周りの粒子の測定変数を暗黙のうちに指定しているか、相互作用がなくこの確率分布が他の粒子に影響を受けない場合である。多粒子系に話を拡張するのだが、粒子の種類はすべて異なる系に話を限定する。現実的にはそんなことはありえないが、同種粒子系だと少し話がややこしくなってしまうからである。

多粒子系への拡張は、今まで 3 次元で行ってきたことが単にそれ以上の次元になるというだけのことである。それゆえ、簡潔に式を書き下すだけにする。

### 位置と運動量

$x_i$  を直交座標の位置座標、 $p_i$  を  $x_i$  に対応する運動量とする。2 粒子なら  $2 \times 3$  の 6 成分、3 粒子なら  $3 \times 3$  の 9 成分ある。  $n$  粒子系なら  $3n$  成分ある。任意の状態  $\lambda$  での位置の確率分布  $P(x_1, x_2, \dots; \lambda)$ 、運動量の確率分布  $P(p_1, p_2, \dots; \lambda)$  に対して

$$P(x_1, x_2, \dots; \lambda) = |\psi(x_1, x_2, \dots; \lambda)|^2 \quad P(p_1, p_2, \dots; \lambda) = |\varphi(p_1, p_2, \dots; \lambda)|^2 \quad (1.5)$$

$$\psi(x_1, x_2, \dots; \lambda) = \sum_{p_1, p_2, \dots} U(x_1, p_1) U(x_2, p_2) \dots \varphi(p_1, p_2, \dots; \lambda) \quad (1.6)$$

を満たす  $\psi(x_1, x_2, \dots; \lambda), \varphi(p_1, p_2, \dots; \lambda)$  と状態によらないユニタリ行列  $U(x_i, p_i)$  が存在する。

### エネルギー

又、エネルギー  $\varepsilon$  の測定状態、これも状態の一つだから、この状態に対応する、(1.5),(1.6) を満たす位置の確率振幅があり、それを

$$k(x_1, x_2, \dots; \varepsilon)$$

としよう。これはユニタリ行列になる。そして任意の状態  $\lambda$  でのエネルギーの確率振幅を

$$\psi(\varepsilon; \lambda) \equiv \sum_{x_1, x_2, \dots} k^*(x_1, x_2, \dots; \varepsilon) \psi(x_1, x_2, \dots; \lambda)$$

と定義すると、この絶対値の 2 乗はエネルギーの確率分布に等しくなる。つまり

$$P(\varepsilon; \lambda) = |\psi(\varepsilon; \lambda)|^2$$

となる。

### 角運動量

角運動量でも同様である。角運動量の  $z$  成分が  $l_{z1}, l_{z2}, \dots$  である測定状態—— $l_{z1}$  は 1 番目の粒子の角運動量の  $z$  成分、 $l_{z2}$  は 2 番目の粒子の角運動量の  $z$  成分、という意味——の位置の確率振幅を極座標でそれぞれ  $(r_1, \theta_1, \phi_1), (r_2, \theta_2, \phi_2), \dots$  で表すと、

$$k(\phi_1; l_{z1}) \cdot k(\phi_2; l_{z2}) \dots \psi(r_1, \theta_1) \psi(r_2, \theta_2) \dots$$

となる。 $k(\phi_i; l_{zi})$  はユニタリ行列になる。これも数学的事実ではなく、確率分布の持つ性質である。そして任意の状態  $\lambda$  での角運動量の確率振幅を

$$\varphi(r_1, \theta_1, l_{z1}, r_2, \theta_2, l_{z2}, \dots; \lambda) \equiv \sum_{\phi_1, \phi_2, \dots} k^*(\phi_1; l_{z1}) k^*(\phi_2; l_{z2}) \cdots \psi(r_1, \theta_1, \phi_1, r_2, \theta_2, \phi_2, \dots; \lambda)$$

と定義する。この確率振幅の絶対値の 2 乗は確率分布に等しくなる。つまり式で書くと

$$P(r_1, \theta_1, l_{z1}, r_2, \theta_2, l_{z2}, \dots; \lambda) = |\varphi(r_1, \theta_1, l_{z1}, r_2, \theta_2, l_{z2}, \dots; \lambda)|^2$$

となる。

## 1.7 スピン変数も含めた確率振幅

今までスピンを無視してきたが、粒子はスピンという角運動量を持つ。今まで確率分布  $P(x, y, z)$  などとして話をしてきたが、これは正確ではない。実際は測定変数としてスピンを加えなければならない。それを  $s$  と書くと

$$P(x, y, z, s)$$

が正確な確率分布である。 $P(x, y, z)$  として意味をなすのは、スピンの状態を暗黙のうちに指定しているか、位置の確率がスピんに依存しない場合である。どちらの場合も何らかのスピンの状態を指定しているのである。

さて、スピンを加えることは 1 粒子での話を 2 粒子や多粒子に拡張した場合とだいたい同じである。とりあえず、粒子の位置を無視し、スピンのみに着目した確率分布、確率振幅を考える。そして簡単なのでスピン 1/2 の系——スピン 1 の系というのもあるのだが——を考えることにする。スピン 1/2 の系では、ある向きのスピンを測ると  $\hbar/2$  か  $-\hbar/2$  という測定値しか現れない。これはどの向きで測っても同じことで、他の向きで測っても  $\hbar/2$  か  $-\hbar/2$  しか現れない。今までの位置や運動量などの物理量に対応するのは、このどこかの向きのスピンである。そういう意味で——向きというものは無限にあるので——物理量は無限にあるということになる。ここらへんは第 3 章の冒頭でもう少し詳しく述べる。今任意の状態  $\lambda$  での  $z$  方向のスピンの確率分布  $P(s_z; \lambda)$ 、 $x$  方向のスピンの確率分布  $P(s_x; \lambda)$  に対して—— $s_z$ 、 $s_x$  は  $\hbar/2$  か  $-\hbar/2$  を取る——

$$P(s_z; \lambda) = |\psi(s_z; \lambda)|^2 \quad P(s_x; \lambda) = |\varphi(s_x; \lambda)|^2$$

$$\varphi(s_x; \lambda) = \sum_{s_z} U(s_x, s_z) \psi(s_z; \lambda)$$

を満たす、 $z$  方向の確率振幅  $\psi(s_z; \lambda)$ 、 $x$  方向の確率振幅  $\varphi(s_x; \lambda)$ 、及びユニタリ行列  $U(s_x, s_z)$  が存在する。これはあくまで位置などを省略した書き方であり、正確には

$$\varphi(x, y, z, s_x; \lambda) = \sum_{s_z} U(s_x, s_z) \psi(x, y, z, s_z; \lambda)$$

ということである。これを更に運動量に変換すれば

$$\varphi(p_x, p_y, p_z, s_x; \lambda) = \sum_{s_z} U(s_x, s_z) \sum_{x, y, z} U(p_x, x) U(p_y, y) U(p_z, z) \psi(x, y, z, s_z; \lambda)$$

となる。又位置と運動量の変換はスピン変数が省略されているのであって、正確には

$$\varphi(p_x, p_y, p_z, s_x; \lambda) = \sum_{x, y, z} U(p_x, x) U(p_y, y) U(p_z, z) \psi(x, y, z, s_x; \lambda)$$

ということである。

以上で確率振幅、変換行列の導入は終了である。説明としては1粒子の場合から、多粒子系に移り、さらに実はスピンというものもあるのだという方向に進んだ。同種粒子系の説明は割愛した。全体としては統一した説明にはなっていない——特に角運動量が——と思う。やはり、それは、以前述べたように、私の理解不足と確率振幅というものの不自然さによるのだと思う。

## 1.8 時間発展方程式

確率分布の時間発展は一意的に決まるのだが、その方程式はややこしい。しかしエネルギーの確率振幅の時間発展方程式は単純である。エネルギーの確率振幅で状態は完全に決まる。つまり変換行列によって他の物理量の確率振幅が決まり、そして確率分布も決まる。

### エネルギーの時間発展方程式

エネルギー  $\varepsilon$  の確率振幅  $\varphi_\varepsilon$  の時間発展は

$$i\hbar \frac{d\varphi_\varepsilon}{dt} = \varepsilon \varphi_\varepsilon \quad (1.7)$$

という線形方程式で決まる。尚、エネルギーの確率振幅は縮退している場合もあるし、エネルギーの測定値はあらゆる値が現れるわけではない。式 (1.7) の解  $\varphi_\varepsilon(t)$  は初期条件として  $t=0$  のとき  $\varphi_\varepsilon(0)$  とすると

$$\varphi_\varepsilon(t) = \exp\left(-i\frac{\varepsilon}{\hbar}t\right) \varphi_\varepsilon(0)$$

となる。

### 他の物理量の時間発展方程式

(1.7) はエネルギーの確率振幅の方程式だが他の物理量の確率振幅の方程式に書き換えるのは、線形代数や微分方程式の教科書に書いてあるとおりである。つまり例えば位置の確率振幅を  $\psi_x$  とし、位置からエネルギーの確率振幅への変換が

$$\varphi_\varepsilon = \sum_x U_{\varepsilon x} \psi_x \quad (\varphi = U\psi)$$

だとすると——右のカッコの中は添字を省いた略記法——これを (1.7) に代入して

$$i\hbar \sum_x U_{\varepsilon x} \frac{d\psi_x}{dt} = \varepsilon \sum_x U_{\varepsilon x} \psi_x \quad \left(i\hbar U \frac{d\psi}{dt} = E U \psi\right)$$

となる。ここでカッコの中の式の  $E$  というのは対角成分がエネルギー  $\varepsilon$  である行列  $E \equiv \varepsilon \delta_{\varepsilon\varepsilon'}$  のこと。これに  $U_{\varepsilon x'}$  を掛けて  $\varepsilon$  について和を取ると

$$i\hbar \sum_{\varepsilon, x} U_{\varepsilon x'}^* U_{\varepsilon x} \frac{d\psi_x}{dt} = \sum_{\varepsilon} U_{\varepsilon x'}^* \varepsilon \sum_x U_{\varepsilon x} \psi_x \quad \left(i\hbar U^\dagger U \frac{d\psi}{dt} = U^\dagger E U \psi\right)$$

となる。

$$\sum_{\varepsilon} U_{\varepsilon x'}^* U_{\varepsilon x} = \delta_{x'x}$$

なので、これは

$$i\hbar \frac{d\psi_{x'}}{dt} = \sum_x \left( \sum_{\varepsilon} U_{\varepsilon x'}^* \varepsilon U_{\varepsilon x} \right) \psi_x \quad \left( i\hbar \frac{d\psi}{dt} = U^\dagger E U \psi \right)$$

となる。ここで  $H_{x'x}$  を

$$H_{x'x} \equiv \sum_{\varepsilon} U_{\varepsilon x'}^* \varepsilon U_{\varepsilon x} \quad (H \equiv U^\dagger E U)$$

と定義すると

$$i\hbar \frac{d\psi_{x'}}{dt} = \sum_x H_{x'x} \psi_x \quad \left( i\hbar \frac{d\psi}{dt} = H \psi \right)$$

と書ける。 $H_{x'x}$  をハミルトニアン行列、又は単にハミルトニアンという。これは位置表示のハミルトニアン行列である。他の表示、例えば運動量表示でのハミルトニアン行列も同様に定義される。ただ、変換行列の部分が位置からエネルギーの  $U_{\varepsilon x}$  でなくて、 $U_{\varepsilon p}$  に変わるだけである。エネルギー表示のハミルトニアン行列は対角行列でその成分は測定変数の  $\varepsilon$  である。

尚、このハミルトニアン行列はエルミート行列になる。エルミート行列というのは、その転置共役がそれ自身と等しい、つまり

$$H_{\alpha\beta} = H_{\beta\alpha}^*$$

となる行列のことである。エルミート行列となる証明をしよう。簡単である。

$$\begin{aligned} H_{\beta\alpha}^* &= \left( \sum_{\varepsilon} U_{\varepsilon\beta}^* \varepsilon U_{\varepsilon\alpha} \right)^* \\ &= \sum_{\varepsilon} U_{\varepsilon\beta} \varepsilon U_{\varepsilon\alpha}^* \\ &= \sum_{\varepsilon} U_{\varepsilon\alpha}^* \varepsilon U_{\varepsilon\beta} \\ &= H_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

というわけである。ここでエネルギー  $\varepsilon$  は実数であることを使った。添字を略すと

$$\begin{aligned} H^\dagger &= (U^\dagger E U)^\dagger \\ &= U^\dagger E U \\ &= H \end{aligned}$$

ということで、こちらの方が見やすい。

確率分布のままでは時間発展方程式が複雑になってしまう。エネルギーの確率分布の時間発展は

$$\frac{dP(\varepsilon)}{dt} = 0$$

であるが、位置や運動量の確率分布の  $\frac{dP(x)}{dt}$ ,  $\frac{dP(p)}{dt}$  などは、複雑すぎて書き下せない。確率振幅などという2次的なものを導入せざるを得ない理由の1つがここにある。

このように確率分布の時間発展は確率振幅を通してわかるのだが、その初期状態をどうやって知るのだろうか。今、ここにある粒子が、一体どういう確率分布の状態にあるのか。それがわからなければ確率分布の時間発展方程式も意味がないではないか。測定の直後には測定状態に飛び移るのでわかるのだが、それ以外は難しい問題であり明確な答えはない。又、測定の直後はわかると言っても実際は測定には幅があり、どのような状態に移るのかは正確にはわからないのである。

## 1.9 測定変数の一部の測定

状態が2つ以上の測定変数の確率振幅で表されているとき、そのうちの1つを測ったとき、状態はどんな状態に飛び移るのだろうか。例えば電子と陽子の系では電子の位置と陽子の位置という測定変数での確率振幅で状態は表されるわけだが、そのどちらか一方の位置を測ったとき、ある測定値を得る確率はどのようなのだろうか。そして状態はどういう状態にどび移るのだろうか。又、位置自体も3つの測定変数に分かれるのだが、そのうちの一つだけを測定したらどうなるのだろうか。

今電子と陽子の2粒子系を考え、電子の位置  $x$  と陽子の位置  $y$  の確率振幅  $\psi(x, y)$  のとき、電子の位置のみを測って、位置が  $x'$  である確率  $P(x')$  はどれだけなのだろうか。常識的に考えれば、電子の位置が  $x'$  で陽子の位置はどこか任意の位置である確率をすべて足し合わせたものであろう。つまり

$$P(x') = \sum_y P(x', y) = \sum_y |\psi(x', y)|^2$$

となろう。では電子の位置が  $x'$  とわかったなら、確率振幅はどういう状態に収縮するのだろうか。まず言えそうなのは、電子の位置が  $x'$  でないものは消えるということである。陽子の位置についての確率振幅についてはそのまま変化しないと考えてみよう。つまり測定後の確率振幅  $\psi_{\text{後}}(x, y)$  は

$$\psi_{\text{後}}(x, y) = \begin{cases} \psi(x', y) & x = x' \text{ のとき} \\ 0 & x \neq x' \text{ のとき} \end{cases}$$

となるとしてみよう。ただこれでは規格化されていないので、規格化因子を掛けなければならない。規格化因子は

$$\frac{1}{\sqrt{\sum_y |\psi(x', y)|^2}}$$

であり、これは

$$\frac{1}{\sqrt{P(x')}}$$

に等しい。今の議論が、特に電子の位置や陽子の位置などでなく、どんな場合でも成り立つと考えるなら、一般に

$x, y$  を測定変数として、確率振幅が  $\psi(x, y)$  の状態のとき  $x$  について測定した結果、測定値が  $x'$  である確率  $P(x')$  は

$$P(x') = \sum_y P(x', y) = \sum_y |\psi(x', y)|^2$$

確率振幅  $\psi_{\text{後}}(x, y)$  は

$$\psi_{\text{後}}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{P(x')}} \psi(x', y) & x = x' \text{ のとき} \\ 0 & x \neq x' \text{ のとき} \end{cases}$$

に収縮する。

と考えられる。しかし普通に考えれば、電子の位置を測れば陽子の位置にも影響を及ぼすはずであり、単純に消えるとは考えづらい。そういう疑問もあるが電子と陽子が十分離れている場合などは正しいであろう。

電子の位置と陽子の位置を同時に測りその測定値が  $x', y'$  である確率は

$$|\psi(x', y')|^2 \quad (1.8)$$

であるわけだが、これは電子の位置を測り測定値が  $x'$  で、かつその直後に陽子の位置を測りその測定値が  $y'$  である確率と等しくなっているはずである。それが今の考えで成り立つことを確かめよう。最初の測定で電子の位置が  $x'$  である確率を  $P(x')$  とすると、その直後に陽子の位置を測り、 $y'$  である確率は

$$\frac{1}{P(x')} |\psi(x', y')|^2$$

であった。だから、測定値が  $x'$  で、その直後の測定で  $y'$  である確率は

$$P(x') \times \frac{1}{P(x')} |\psi(x', y')|^2 = |\psi(x', y')|^2$$

である。これは、同時に測った場合の式 (1.8) と等しくなり矛盾はないわけである。

## 1.10 実験で確率分布を求めるに際しての困難

今まで確率分布が与えられたものとして話を進めてきたが、その確率分布というものをどうやって知るといえるのだろうか。確率分布を求めるためには同じ状態で何度も測定を繰り返さなければならない。そのためには今回の実験が前と同じ状態にいるということがわかっていなければならない。いったい、どうやって同じ状態であるということを知ることができるのか。測定の直後に限って言えば測定状態に飛び移るということになっているので、この場合は今どういう状態にいるかはわかる。ただ測定状態以外の状態ではわからない。可能な限り同じ状況を作って測定するしかならなそう。ここらへんはわからない問題である。しかしこのことを突っ込んで考えても先に進めないでこういう根本的な問題があるということだけ頭においておこう。スピン 1/2 の系では、実験で確率分布を求めることができる。具体的な実験法は磁場で分離し測定状態を作り、その状態であらゆる方向でのスピンを測ることである。詳しくは第 7 章を見て欲しい。スピンの状態は、すべての状態がどこかの方向の測定状態であるという特別な理由があるので可能なのである (3.1 節参照)。この困難は第 4 章で述べる固有ベクトル法で求めた変換行列が正しいかを実験的に確かめる際にも生じるものである。

## 第 2 章

# 変換行列と確率振幅の任意性 (様々な表現)

この章では、変換行列と確率振幅には任意性があること、又、そのことと時間発展方程式との関係について述べる。数学の話であり、物理の話はでてこない。この章の話は量子力学の体系の中ではやや脱線した話になっている。ただ、第 3 章の話——そこではスピンの変換行列と確率振幅を求める——の基礎にはなっている。

### 2.1 任意性

すべての状態  $\lambda$  での確率分布の集まりを確率分布団と呼ぶことにする。与えられた確率分布団に対して、変換行列と確率振幅は一つに定まらず、任意性がある。この章ではそのことについて述べる。物理量は何個あってもいいのだが、具体性を出すために、位置から運動量、それと位置からエネルギーの変換を考える。位置から運動量への変換行列  $U_{px}$ 、位置からエネルギーへの変換行列  $U_{\varepsilon x}$ 、そして任意の状態  $\lambda$  での位置、運動量、エネルギーの確率振幅  $\psi(x; \lambda)$ ,  $\varphi(p; \lambda)$ ,  $\varphi(\varepsilon; \lambda)$  は与えられた状態  $\lambda$  での位置、運動量、エネルギーの確率分布  $P(x; \lambda)$ ,  $P(p; \lambda)$ ,  $P(\varepsilon; \lambda)$  に対して

$$P(x; \lambda) = |\psi(x; \lambda)|^2 \quad P(p; \lambda) = |\varphi(p; \lambda)|^2 \quad P(\varepsilon; \lambda) = |\varphi(\varepsilon; \lambda)|^2 \quad (2.1)$$

$$\varphi(p; \lambda) = \sum_x U_{px} \psi(x; \lambda) \quad \varphi(\varepsilon; \lambda) = \sum_x U_{\varepsilon x} \psi(x; \lambda) \quad (2.2)$$

を満たす。第 1 章ではエネルギーの確率振幅は位置の確率振幅から定義したが、それはこの式を満たすためにはそうする必然性が——位相を除いて——あったからである。

#### 位相の不定性

この確率振幅から新たに

$$\psi'(x; \lambda) \equiv e^{ig(x)} \psi(x; \lambda) \quad \varphi'(p; \lambda) \equiv e^{if(p)} \varphi(p; \lambda) \quad \varphi'(\varepsilon; \lambda) \equiv e^{ih(\varepsilon)} \varphi(\varepsilon; \lambda) \quad (2.3)$$

という確率振幅を作ろう。ここで  $f, g, h$  は状態に依存しない任意の実関数。そしてそれに合わせて新たな変換行列

$$U'_{px} \equiv e^{if(p)} U_{px} e^{-ig(x)} \quad U'_{\varepsilon x} \equiv e^{ih(\varepsilon)} U_{\varepsilon x} e^{-ig(x)} \quad (2.4)$$

を作ろう。この新たな確率振幅と変換行列は明らかに (2.1)、(2.2) を満たす。変換 (2.3) は線形変換であることに注意。この確率振幅と変換行列の変換を視覚的に書くと図 2.1 のようになる。この変換行列の変換 (2.4)

$$\begin{array}{l}
\text{状態 } \lambda_1 \begin{pmatrix} c \times \varphi(p_1, \lambda_1) \\ d \times \varphi(p_2, \lambda_1) \end{pmatrix} = c \times \begin{pmatrix} a^* & b^* \\ \times & \times \\ U(p_1, x_1) & U(p_1, x_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \times \psi(x_1, \lambda_1) \\ b \times \psi(x_2, \lambda_1) \end{pmatrix} \\
\text{状態 } \lambda_2 \begin{pmatrix} c \times \varphi(p_1, \lambda_2) \\ d \times \varphi(p_2, \lambda_2) \end{pmatrix} = c \times \begin{pmatrix} a^* & b^* \\ \times & \times \\ U(p_1, x_1) & U(p_1, x_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \times \psi(x_1, \lambda_2) \\ b \times \psi(x_2, \lambda_2) \end{pmatrix}
\end{array}$$

図 2.1  $|a| = |b| = |c| = |d| = 1$ 。  $\psi(x)$  の 1 行目に  $a$  を掛けたら  $U$  の 1 列目に  $a^*$  を掛ける。  $\varphi(p)$  の 1 行目に  $c$  を掛けたら  $U$  の 1 行目に  $c$  を掛ける。このような手順によってできる新たな変換行列、確率振幅も (2.1)、(2.2) を満たす。状態  $\lambda_1$  でも状態  $\lambda_2$  でも同じ操作が必要。

によってもユニタリ行列であることは変わらない。というのは、ある列（又は行）のすべての成分に絶対値 1 の数を掛けても、各列間（又は各行間）の直交性は保たれるからである。確率振幅に絶対値 1 の数を掛けるにあたって、成分や物理量によって値は変えてもいいが、すべての状態で同じ数を掛けなければならない。図 2.1 で言えば、状態  $\lambda_1$  で  $\psi(x_1, \lambda_1)$  に  $a$  を掛けたら、状態  $\lambda_2$  でも  $\psi(x_1, \lambda_2)$  に  $a$  を掛けなければならない。そうしなければ状態ごとに変換行列を変えなければならない、変換行列の意味をなさないのである。

### 定数倍の不定性

変換行列を定めても確率振幅には絶対値 1 の定数倍の不定性がある。つまり新しい確率振幅を

$$\psi'(x; \lambda) \equiv k(\lambda)\psi(x; \lambda) \quad \varphi'(p; \lambda) \equiv k(\lambda)\varphi(p; \lambda) \quad \varphi'(\varepsilon; \lambda) \equiv k(\lambda)\varphi(\varepsilon; \lambda)$$

として変換行列はそのまま、(2.1)、(2.2) は満たされる。ここで  $k(\lambda)$  は絶対値 1 の複素数で、状態  $\lambda$  によって値を変えてもいいが、すべての物理量とすべての成分に同じものを掛けなければならない (図 2.2)。  $k(\lambda)$  がすべての状態で同じ値なら、これは (2.3) の特別な場合であり線形変換だが、そうでない場合は、変換 (2.3) の特別な場合ではなく線形変換ではない。(2.3) はすべての状態で同じ数を掛けなければならないからである。

### 複素共役

また、明らかに与えられた確率分布団に対して確率振幅  $\varphi(p; \lambda), \psi(x; \lambda), \varphi(\varepsilon; \lambda)$ 、変換行列  $U_{px}, U_{\varepsilon x}$  が式 (2.1)、(2.2) を満たすなら、その複素共役  $\varphi^*(p; \lambda), \psi^*(x; \lambda), \varphi^*(\varepsilon; \lambda), U_{px}^*, U_{\varepsilon x}^*$  も式 (2.1)、(2.2) を満たす。これは線形変換ではない。というのは、例えば、ある状態の確率振幅の複素共役は

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1-i \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{i \text{ 倍}} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1+i \\ 0 \end{pmatrix}$$

と変化し、これは  $i$  倍されているが、別の状態の確率振幅では

$$\begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-1 \text{ 倍}} \begin{pmatrix} -i \\ 0 \end{pmatrix}$$



**状態  $\lambda_1$**

運動量		位置		エネルギー		位置
$\begin{pmatrix} a \varphi(p_1, \lambda_1) \\ a \varphi(p_2, \lambda_1) \end{pmatrix}$	$= \begin{pmatrix} U(p_1, X_1) & U(p_1, X_2) \\ U(p_2, X_1) & U(p_2, X_2) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a \psi(x_1, \lambda_1) \\ a \psi(x_2, \lambda_1) \end{pmatrix}$	$= \begin{pmatrix} U(\varepsilon_1, X_1) & U(\varepsilon_1, X_2) \\ U(\varepsilon_2, X_1) & U(\varepsilon_2, X_2) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a \varphi(\varepsilon_1, \lambda_1) \\ a \varphi(\varepsilon_2, \lambda_1) \end{pmatrix}$	$= \begin{pmatrix} U(\varepsilon_1, X_1) & U(\varepsilon_1, X_2) \\ U(\varepsilon_2, X_1) & U(\varepsilon_2, X_2) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a \psi(x_1, \lambda_1) \\ a \psi(x_2, \lambda_1) \end{pmatrix}$

**状態  $\lambda_2$**

運動量		位置		エネルギー		位置
$\begin{pmatrix} b \varphi(p_1, \lambda_2) \\ b \varphi(p_2, \lambda_2) \end{pmatrix}$	$= \begin{pmatrix} U(p_1, X_1) & U(p_1, X_2) \\ U(p_2, X_1) & U(p_2, X_2) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} b \psi(x_1, \lambda_2) \\ b \psi(x_2, \lambda_2) \end{pmatrix}$	$= \begin{pmatrix} U(\varepsilon_1, X_1) & U(\varepsilon_1, X_2) \\ U(\varepsilon_2, X_1) & U(\varepsilon_2, X_2) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} b \varphi(\varepsilon_1, \lambda_2) \\ b \varphi(\varepsilon_2, \lambda_2) \end{pmatrix}$	$= \begin{pmatrix} U(\varepsilon_1, X_1) & U(\varepsilon_1, X_2) \\ U(\varepsilon_2, X_1) & U(\varepsilon_2, X_2) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} b \psi(x_1, \lambda_2) \\ b \psi(x_2, \lambda_2) \end{pmatrix}$

図 2.2 確率振幅の定数倍の不定性。|a| = |b| = 1。確率振幅には同じ変換行列に対して定数倍の任意性がある。同じ状態ではすべての成分、すべての物理量で同じ数を掛けなければならない。

というように、 $i$  倍ではなく、 $-1$  倍されているからである。なぜ線形か線形でないかにこだわるのかというと、後で述べる時間発展方程式と関係があるからである。

## 2.2 確率振幅、変換行列は 2 つのグループに分かれること

確率振幅と変換行列にはこのように任意性があり、無限にあるのだが、与えられた確率分布団に対し解はどれくらいあるのだろうか。そこで、位置と運動量についての方程式

$$P(x; \lambda) = |\psi(x; \lambda)|^2 \quad P(p; \lambda) = |\varphi(p; \lambda)|^2 \quad \varphi(p; \lambda) = \sum_x U_{px} \psi(x; \lambda) \quad (2.5)$$

の解はどれだけあるのかを考えよう。他の物理量に関しては、第 1 章で述べたように、位置（又は運動量）の確率振幅から自動的に決まってしまうのでとりあえず位置と運動量だけ考えればよい。命題 1.3 で述べたように、変換行列の絶対値に関しては

$$|U_{px}|^2 = P(p; x)$$

が成り立つ。だからその絶対値は確率分布から定まるし、確率振幅の絶対値も確率分布から定まる。数式で書くと

$$|U_{px}| = \sqrt{P(p; x)} \quad |\psi(x; \lambda)| = \sqrt{P(x; \lambda)} \quad |\varphi(p; \lambda)| = \sqrt{P(p; \lambda)}$$

ということである。そういうわけで、変換行列と確率振幅の位相だけが未知数ということになる。

さて、もし、(2.5) の解が存在するなら、その解である変換行列  $U_{px}$  に

$$e^{if(p)} U_{px} e^{-ig(x)}$$

という変換を何回か行えば、1 行目と 1 列目を——元々行列には順序の概念がないので、これは 1 行目とか 1 列目でなくても何行目でも、何列目でもいいのだが——正の実数にすることができる。又、定数倍を掛けるこ

とによって  $\psi(x; \lambda)$  の 1 行目を正の実数にすることができる。だから  $U_{px}$  の 1 行目と 1 列目、 $\psi(x; \lambda)$  の 1 行目は正の実数であるという条件のもと、解を探せば良い。そういうわけで、変換行列  $U_{px}$  の 2 行目と 2 列目以降の位相、それと確率振幅  $\psi(x; \lambda)$  の 2 行目以降の位相が未知数となる (図 2.3 参照)。後はこの未知数を

$$\begin{pmatrix} \varphi(p, \lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{px} & \psi(x, \lambda) \\ \text{正} & \text{正} \\ \text{正} & \text{正} \\ \text{正} & \text{正} \\ \text{正} & \text{正} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{正} \\ \text{位相} \\ \text{未知数} \end{pmatrix}$$

図 2.3

使って表した  $\sum_x U_{px} \psi(x; \lambda)$  が

$$P(p; \lambda) = \left| \sum_x U_{px} \psi(x; \lambda) \right|^2 \quad (2.6)$$

を任意の状態  $\lambda$  で満たすように決めてやればよいわけである。状態は無限にあるのだから、この方程式は無限にあるということである。その無限個の方程式を、(測定変数を有限個に離散化しているとして) 有限個の未知数で満たすものがあるというのは不思議な話である。具体的にどう解を求めるかと言うと、それは煩雑なだけなので述べないが、例えば、状態  $\lambda$  として、 $\psi(x; \lambda)$  が 2 つの成分でのみ値が 0 とならないようなものを選んで方程式を作り、位相を決めていけばいいと思う。そしてこのように——1 行目を正の実数にするなどの——制限をした上での変換行列の解はどれだけあるかと言うと、私の感触ではおそらく、2 つしかないと思う。それは互いに複素共役なものが 2 つあるということである。もしそれが正しいならば、(2.5) の解は今まで述べた変換で移り合えるものに限られるということである。つまり任意の 2 つの解  $U_{px}, V_{px}$  があるとすると、 $U_{px}$  に  $e^{if(p)} U_{px} e^{-ig(x)}$  という変換を施したり、複素共役を取るなどすると  $V_{px}$  に移ることができるということである。このことは、変換行列は図 2.4 のように互いに複素共役なグループに分れる、それ以外の解は存在しないということを意味する。

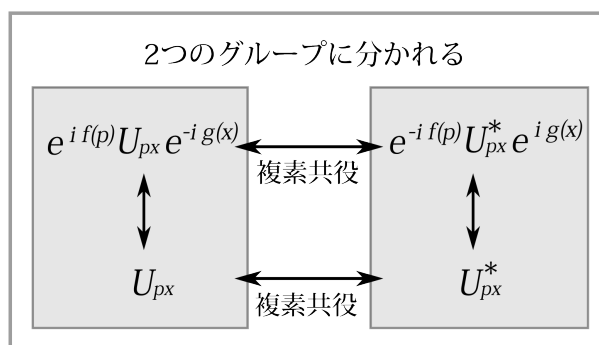


図 2.4 変換行列は互いに複素共役な 2 つのグループに分かれると考えられる。

変換行列を 1 つ定めれば、状態  $\lambda$  に対して確率振幅は——定数倍を除いて——1 つに定まると思う。その理由はこうである。状態  $\lambda$  での確率振幅を求めるということは (2.6) 式を解くということである。今、測定変数  $x$  も  $p$  も  $n$  個に離散化されているとすると方程式は  $p$  を離散化した分の  $n$  個あることになる。一方未知数

は  $\psi(x; \lambda)$  の 2 行目以降の位相の未知数  $n - 1$  個である (図 2.5)。これでは合わないが、変換行列がユニタ

$$\begin{pmatrix} \varphi(p, \lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{px} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi(x, \lambda) \\ \text{正} \\ \text{\scriptsize } n-1 \\ \text{\scriptsize } \text{個の} \\ \text{\scriptsize } \text{未知} \\ \text{\scriptsize } \text{数} \end{pmatrix}$$

図 2.5

リーなので、確率の全事象が 1 に自動的に規格化される。すなわち

$$\sum_p \left| \sum_x U_{px} \psi(x; \lambda) \right|^2 = 1$$

が自動的に成り立つので方程式の数は 1 つ減り  $n - 1$  個になる。 $n - 1$  個の未知数で  $n - 1$  個の方程式なら通常は解は 1 つに定まるだろう。実際はその複素共役も必ず解になるので 2 つであろう。これが解が 2 つのみと考える理由である。今の話は証明にも何にもなっていないが、こころへんはあまり物理とは関係ない話なので、おそらく 2 つであろうということでもいいと思う。もしこれ以外の解があったら物理的にどういうことを意味するのかという疑問の方が強い。次の第 3 章でスピン 1/2 の系で実際に確率振幅と変換行列を求めるが、少なくともその系ではこれらのことは成り立っている。尚、位置と運動量以外に関する変換行列や確率振幅は、第 1 章でのべたように位置の (又は運動量の) 確率振幅から自動的に決まっていくので——私自身、詳細までは詰めてないが——同様に 2 つのグループに分かれることになる。

### 2.3 ここまでのまとめと考察

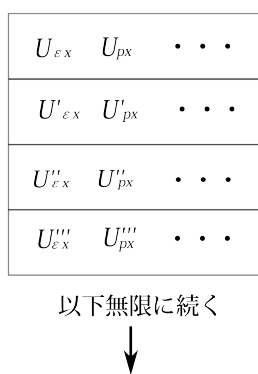


図 2.6 その系に許される変換行列の組

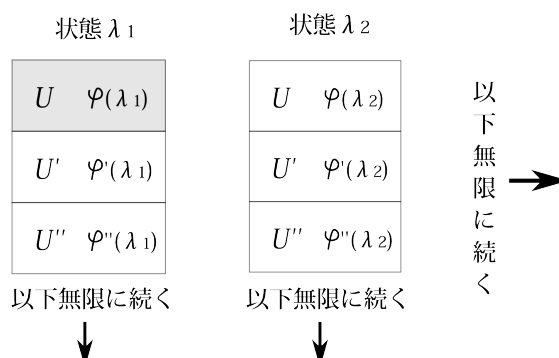


図 2.7 状態ごとに変換行列に対応した確率振幅がある

ここで、今までのことをモード図を使ってイメージを描いておこう。考えている系で——電子 1 つの系だとか、電子と陽子の系だとか、ポテンシャルがクーロンポテンシャルだとかという意味での系——許される変換行列の組  $U_{\varepsilon x}, U_{px}, \dots$ 、そして同じグループ内の組、 $U'_{\varepsilon x}, U'_{px}, \dots, U''_{\varepsilon x}, U''_{px}, \dots, \dots$  が無限にあり (図 2.6)、この変換行列に対応して、状態ごとに物理量ごとの確率振幅がある (図 2.7)。図 2.7 の状態  $\lambda_1$  で変

$U_{\varepsilon x}$	$U_{px}$	$\dots$	$\dots$
$\varphi_{\varepsilon}(\lambda_1)$	$\varphi_p(\lambda_1)$	$\psi_x(\lambda_1)$	$\dots$
$a\varphi_{\varepsilon}(\lambda_1)$	$a\varphi_p(\lambda_1)$	$a\psi_x(\lambda_1)$	$\dots$
$b\varphi_{\varepsilon}(\lambda_1)$	$b\varphi_p(\lambda_1)$	$b\psi_x(\lambda_1)$	$\dots$
$c\varphi_{\varepsilon}(\lambda_1)$	$c\varphi_p(\lambda_1)$	$c\psi_x(\lambda_1)$	$\dots$

図 2.8 図 2.7 のグレイの部分の詳細。 $|a| = |b| = |c| = 1$ 。変換行列を定めても確率振幅には定数倍の不定性がある。

換行列  $U$  の組（グレイの部分）を詳しく見ると、図 2.8 のように確率振幅には絶対値が 1 の定数倍の不定性がある。そして最後にこの裏返しのような形で、これらの複素共役も許される変換行列と確率振幅である。

確率振幅に任意性があることについては、線形代数学の考え方に沿えば、表示  $\varphi_{\varepsilon}$  が  $\varphi'_{\varepsilon} = e^{ih(\varepsilon)}\varphi_{\varepsilon}$  に変わるというのは基底が変わるからだとということになる。つまり  $\varphi_{\varepsilon}$  の基底が  $e_{\varepsilon}$  だとすると、 $\varphi'_{\varepsilon}$  の基底は  $e'_{\varepsilon} = e^{-ih(\varepsilon)}e_{\varepsilon}$  に変わったからだと言える。ところがこの  $e_{\varepsilon}$  も  $e'_{\varepsilon}$  も同じ量子力学的状態を指すのである。こういうことはベクトル空間では起きないことである。状態は決して線形代数学で言うベクトル空間ではないのである。こころへんはややこしいところではあるが、確率振幅は単に確率分布を計算するための便宜と見て、無理に数学的にすっきりした言葉で説明しようなどと考えなくてもいいのではと思う。私としてはそれよりも物理法則としての量子力学を理解したいという熱意のほうがある。

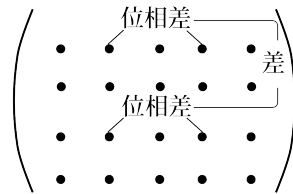


図 2.9 位相差の差が不変量となる

変換行列と確率振幅に任意性がある中で、物理的に意味があるものは何かというと、変換行列では——成分の絶対値は言うまでもないが——同じ行のある列と別の列の成分の位相差と、他の行でのその列とその別の列の成分の位相差の差である。例えば 1 行目で 2 列目と 4 列目の位相差

$$\arg [U(1, 2)] - \arg [U(1, 4)]$$

と 3 行目の 2 列目と 4 列目の位相差

$$\arg [U(3, 2)] - \arg [U(3, 4)]$$

の差が不変量となり物理的な意味を持つ（図 2.9）。これは同じグループ内での変換行列は、同じ行に同じ位相を加えること、同じ列に同じ位相を加えることで移り合うものだからである。もっと一般的に書けば

$$\left( \arg [U(\alpha, \beta)] - \arg [U(\alpha, \gamma)] \right) - \left( \arg [U(\alpha', \beta)] - \arg [U(\alpha', \gamma)] \right)$$

が——正確には複素共役の場合もあるので、この絶対値が——不変量になる。それゆえ、1行目と1列目を正の実数と定めれば——これは位相をすべて0にすることを意味する——2行目、2列目以降の位相は意味を持つ。今の議論は行を列、列を行と読み替えても成り立つ。

又、変換行列を定めると、状態に対応する確率振幅も定まるわけだが、確率振幅で意味があるのは——その絶対値はもちろんであるが——2つの成分間の位相差

$$\arg[\psi_x] - \arg[\psi_{x'}]$$

である。それゆえ、1行目を正の実数と定めてしまえば2行目以降の位相は意味を持つ。

又、変換行列と確率振幅の積  $U_{px}\psi_x$  での不変量は——絶対値は言うまでもないが—— $x$  を変化させたときの位相差

$$\arg[U_{px}\psi_x] - \arg[U_{px'}\psi_{x'}]$$

である。このように変換行列にしる確率振幅にしる、その位相というのはどこかに基準を定めて意味を持つものであり、それ自身には意味はない。

## 2.4 時間発展方程式と2つのグループの関係

今まで、変換行列と確率振幅には任意性があること、そして互いに複素共役な2つのグループに分かれることを述べてきた。この節では、そのことと時間発展方程式との関係について述べる。ここでの話も数学だけであり、物理は出てこない。1.8節で述べたようにエネルギー表示の時間発展方程式は

$$i\hbar \frac{d\varphi_\varepsilon}{dt} = \sum_{\varepsilon'} H_{\varepsilon\varepsilon'} \varphi_{\varepsilon'} \quad H_{\varepsilon\varepsilon'} = \delta_{\varepsilon\varepsilon'} \varepsilon' \quad (\text{エネルギー表示})$$

であった。他の表示、例えば位置、運動量などは、1.8節で述べたように、変換行列を使って表示の変更をすればよいのであって

$$i\hbar \frac{d\psi_x}{dt} = \sum_{x'} H_{xx'} \psi_{x'} \quad H_{xx'} = \sum_{\varepsilon} U_{\varepsilon x}^* \varepsilon U_{\varepsilon x'} \quad (\text{位置表示})$$

$$i\hbar \frac{d\varphi_p}{dt} = \sum_{p'} H_{pp'} \varphi_{p'} \quad H_{pp'} = \sum_{\varepsilon} U_{\varepsilon p}^* \varepsilon U_{\varepsilon p'} \quad (\text{運動量表示})$$

となるのであった。さて、この系の許される変換行列の組  $U_{\varepsilon x}, U_{px}, \dots$  は——この「 $\dots$ 」は位置、エネルギー、運動量以外の変換行列などその他という意味——無数にあるわけで、以下のような疑問が生じる。まず、この無数にある変換行列の組から1つの組を定める。そうすると、与えられた任意の初期状態に対して、確率振幅は——定数倍を除いて——1つに定まる。それを上記方程式に従って時間発展させる。次に、別の変換行列の組み合わせを選んで、この同じ初期状態に対応する確率振幅を定め、この方程式によって時間発展させる。このとき、この2つは同じ状態変化をするのだろうか。という疑問である。答えを先に言うと、同じグループ内の変換行列の組では同じ時間発展するが、異なるグループでの変換行列の組では時間は逆行する。そのことについて今から説明する。

### 同じグループ内

今、時刻  $t=0$  で状態を  $\lambda(0)$  としよう。そして変換行列の組を1つ選び、それを

$$U_{\varepsilon x}, U_{px}, \dots$$

とする。するとこの状態  $\lambda(0)$  に対応する確率振幅の組が定まり、それを

$$\varphi_\varepsilon(0), \psi_x(0), \varphi_p(0), \dots$$

としよう。そしてこの初期状態から上記の方程式に従って時間発展させたときの時刻  $t$  での解を

$$\varphi_\varepsilon(t), \psi_x(t), \varphi_p(t), \dots$$

としよう。そしてそれに対応する状態を  $\lambda(t)$  としよう。この組み合わせと同じグループにある別の変換行列の組

$$U'_{\varepsilon x} = e^{ih(\varepsilon)} U_{\varepsilon x} e^{-ig(x)}, \quad U'_{px} = e^{if(p)} U_{px} e^{-ig(x)}, \quad \dots\dots$$

を考えよう。そして、この変換行列に合わせて、確率振幅の組

$$\varphi'_\varepsilon(t) = e^{ih(\varepsilon)} \varphi_\varepsilon(t), \quad \psi'_x(t) = e^{ig(x)} \psi_x(t), \quad \varphi'_p(t) = e^{if(p)} \varphi_p(t), \quad \dots\dots$$

を考えよう。このダッシュ組の確率振幅は当たり前だが、時刻  $t$  で状態は  $\lambda(t)$  を表すことになる。というのは、状態とは確率分布の組のことであり、確率分布が各時刻でダッシュ無しの方と同じだからである。

さて、このダッシュ組の確率振幅はどういう時間発展方程式を満たすのだろうか。エネルギーに関してはダッシュ無しの  $\varphi_\varepsilon(t)$  は

$$i\hbar \frac{d\varphi_\varepsilon(t)}{dt} = \varepsilon \varphi_\varepsilon(t)$$

を満たしているのだから、 $\varphi_\varepsilon(t) = e^{-ih(\varepsilon)t} \varphi'_\varepsilon(t)$  をこれに代入すると、ダッシュ有りの方も

$$i\hbar \frac{d\varphi'_\varepsilon(t)}{dt} = \varepsilon \varphi'_\varepsilon(t) \tag{2.7}$$

満たすことになり、全く同じ形となる。位置や運動量などはどうなるかというと、1.8 節で述べたのと同様にこの線形方程式 (2.7) を位置表示や運動量表示に変換してやればよいわけで、位置表示の方は

$$i\hbar \frac{d\psi'_x(t)}{dt} = \sum_{x'} H'_{xx'} \psi'_{x'}(t) \quad H'_{xx'} = \sum_{\varepsilon} (U'_{\varepsilon x})^* \varepsilon U'_{\varepsilon x'}$$

であり、運動量についても同様である。位置や運動量ではハミルトニアンがダッシュ付きの、つまりこの組自身の変換行列を使わなければならない。だからエネルギー以外の方程式は形式は同じでも中身は異なる方程式であることには注意すべきである。さて以上の議論から言えることは、

**命題 2.1** 無数にある変換行列の組から同じグループの中のどの組を選んでも、与えられた初期条件から時間発展方程式

$$i\hbar \frac{d\varphi_\varepsilon}{dt} = \sum_{\varepsilon'} H_{\varepsilon\varepsilon'} \varphi_{\varepsilon'} \quad H_{\varepsilon\varepsilon'} = \delta_{\varepsilon\varepsilon'} \varepsilon' \quad (\text{エネルギー表示})$$

$$i\hbar \frac{d\psi_x}{dt} = \sum_{x'} H_{xx'} \psi_{x'} \quad H_{xx'} = \sum_{\varepsilon} U_{\varepsilon x}^* \varepsilon U_{\varepsilon x'} \quad (\text{位置表示})$$

等に従って——ここに現れる変換行列はその組の変換行列を使わなければならない——時間発展させると、同じ状態に刻々と変化する。

ということである。尚、同じ組の中だけでなく、同じグループ内の確率振幅はすべて線形変換の関係にあり、微分方程式の表示の変更の関係にある。例えば、ダッシュ無しのエネルギー表示の方程式とダッシュ有りの位置表示の方程式も一種の微分方程式の表示の変更である。

## 異なるグループ間

さて、次に異なるグループの組み合わせを選ぼう。つまり元の

$$\varphi_\varepsilon(t), \psi_x(t), \varphi_p(t), \dots, U_{\varepsilon x}, U_{px}, \dots$$

の複素共役

$$\varphi_\varepsilon^*(t), \psi_x^*(t), \varphi_p^*(t), \dots, U_{\varepsilon x}^*, U_{px}^*, \dots$$

を考えるとということである。この確率振幅の時刻  $t$  での状態も明らかに  $\lambda(t)$  を表すことになる。ではどういう時間発展方程式を満たすのだろうか。元のエネルギーの確率振幅は

$$i\hbar \frac{d\varphi_\varepsilon(t)}{dt} = \varepsilon \varphi_\varepsilon(t)$$

を満たすので、この複素共役をとると

$$-i\hbar \frac{d\varphi_\varepsilon^*(t)}{dt} = \varepsilon \varphi_\varepsilon^*(t)$$

となる。つまり  $\varphi_\varepsilon^*(t)$  は

$$-i\hbar \frac{df_\varepsilon}{dt} = \varepsilon f_\varepsilon$$

という微分方程式を満たすことになる。異なるグループ間の確率振幅は線形変換で結ばれていないので、単なる微分方程式の表示の変更にはならず、方程式自身が変わることになる。

さて、2つの微分方程式

$$i\hbar \frac{df_\varepsilon}{dt} = \varepsilon f_\varepsilon \quad \text{と} \quad -i\hbar \frac{df_\varepsilon}{dt} = \varepsilon f_\varepsilon$$

では、もし  $f_\varepsilon(t)$  が左の解なら、 $f_\varepsilon(-t)$  が右の解になる。つまりこの2つの方程式の解は互いに時間を逆行する。だから  $t=0$  で  $\varphi_\varepsilon^*(0)$  を初期条件として

$$i\hbar \frac{df_\varepsilon}{dt} = \varepsilon f_\varepsilon$$

の方の方程式で時間発展させたら、状態は時刻  $t$  で——変換行列が定まっていれば、状態はエネルギーの確率振幅だけで定まることに注意—— $\lambda(-t)$  となる。そして、命題 2.1 より、こちらのグループのどの変換行列の組を使っても、状態は  $\lambda(-t)$  と時間変化する。さて、現実の世界では初期状態が定めれば、その後は一意的に定まる。ということは現実の状態の時間発展に合うのはどちらか一方のグループの変換行列の組ということになる。合わない方は

$$-i\hbar \frac{df_\varepsilon}{dt} = \varepsilon f_\varepsilon$$

の方を使えば合う。今までは——エネルギーの確率振幅のみで状態は定まるので——エネルギーの確率振幅だけの話をしてきたが、位置や運動量などの確率振幅  $\psi_x^*(t), \varphi_p^*(t)$  の時間発展方程式は、今まで同様、エネルギーの方程式から変換すればいいだけの話である。エネルギーの確率振幅  $\varphi_\varepsilon^*(t)$  の方程式がそれぞれ

$$-i\hbar \frac{d\varphi_\varepsilon^*(t)}{dt} = \varepsilon \varphi_\varepsilon^*(t) \quad i\hbar \frac{d\varphi_\varepsilon^*(t)}{dt} = \varepsilon \varphi_\varepsilon^*(t)$$

を満たすなら、例えば位置に関してはそれぞれ

$$-i\hbar \frac{d\psi_x^*(t)}{dt} = \sum_{x'} H_{xx'}^* \psi_{x'}^*(t) \quad i\hbar \frac{d\psi_x^*(t)}{dt} = \sum_{x'} H_{xx'}^* \psi_{x'}^*(t)$$

になるだけの話である。ハミルトニアンは

$$H_{xx'}^* = \sum_{\varepsilon} (U_{\varepsilon x}^*)^* \varepsilon U_{\varepsilon x'}$$

となる。この  $H_{xx'}^*$  は元のハミルトニアンの複素共役という意味でこう書いたが、ハミルトニアンの作り方自体は元のハミルトニアンの作り方と全く同じである。つまり元の  $U_{\varepsilon x}$  の部分がこの組の変換行列である  $U_{\varepsilon x}^*$  で置き換え変わったものになっている。以上の議論をまとめると次のようになる。

命題 2.2 異なるグループから任意の変換行列の組を1つずつ選んで、与えられた初期状態から方程式

$$i\hbar \frac{d\varphi_{\varepsilon}}{dt} = \sum_{\varepsilon'} H_{\varepsilon\varepsilon'} \varphi_{\varepsilon'} \quad H_{\varepsilon\varepsilon'} = \delta_{\varepsilon\varepsilon'} \varepsilon' \quad (\text{エネルギー表示})$$

$$i\hbar \frac{d\psi_x}{dt} = \sum_{x'} H_{xx'} \psi_{x'} \quad H_{xx'} = \sum_{\varepsilon} U_{\varepsilon x}^* \varepsilon U_{\varepsilon x'} \quad (\text{位置表示})$$

等に従って時間発展させると、状態の時間変化は互いに逆行する。現実合うのはどちらかのグループとなる。合わない方は  $-i\hbar \frac{d\varphi_{\varepsilon}}{dt} = \varepsilon f_{\varepsilon}$  の方を使えば現実合う。尚、ここに現れる変換行列はその組の変換行列であることに注意。

運動量から位置への変換行列は  $e^{ipx/\hbar}$  だが、これは時間発展方程式として  $i\hbar \frac{d\varphi_{\varepsilon}}{dt} = \varepsilon f_{\varepsilon}$  を使っているからである。もし  $-i\hbar \frac{d\varphi_{\varepsilon}}{dt} = \varepsilon f_{\varepsilon}$  の方を使うなら変換行列は  $e^{-ipx/\hbar}$  となる。



## 第3章

# スピン 1/2 での変換行列と確率振幅

この章は第1章と第2章の応用であり、スピン 1/2 の系に適用して確率分布から確率振幅と変換行列を求める。

### 3.1 スピン状態の特徴

確率分布団から変換行列と確率振幅を求めることを、スピン 1/2 の系でやってみよう。スピンの場合で変換行列を求めるというのはあまりいい例ではない。今まで考えてきた位置と運動量の変換とはかなり異なる面があるからである。しかし他にいい例もないのでスピン 1/2 の系でやってみようというわけである。

さて、スピン 1/2 の粒子というのは以下のような特徴がある。

- 【特徴1】 任意の状態はどこかの向きの測定状態であり、測定値  $\hbar/2$  である。
- 【特徴2】 任意の状態で、任意の向きのスピンを測定すると測定値は  $\hbar/2$  か  $-\hbar/2$  となる。
- 【特徴3】 ある向きのスピン  $\hbar/2$  の測定状態にあるとき、別の向きのスピンを測ってスピンの測定値が  $\hbar/2$  である確率は  $\cos^2(\theta/2)$  である。ここで  $\theta$  は2つの向きのなす角で範囲は  $0 \leq \theta \leq \pi$  と制限する。
- 【特徴4】 3つの向きでの確率分布——つまり測定値が  $\hbar/2$  か  $-\hbar/2$  を取る確率——で他のすべての向きの確率分布（すなわち状態）が決まる。

これらのことを簡潔に説明する。【特徴1】は、スピンの任意の状態というのは、図3.1のように必ずどこかの

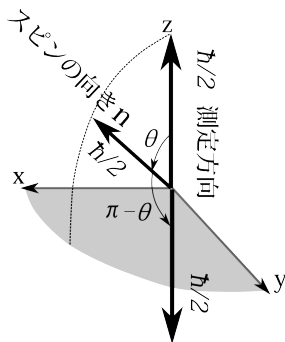


図 3.1

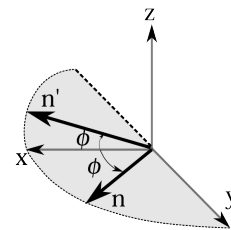


図 3.2

向き——図 3.1 では  $n$  の向き——を向いていて大きさが  $\hbar/2$  だということである。ただ、あくまで向いていると言うのはわかりやすいイメージである。正確にはその向きでスピン  $\hbar/2$  である確率が 1 で、 $-\hbar/2$  である確率が 0 である状態のことである。【特徴 2】は、それを別の方向——図 3.1 では  $z$  方向——のスピンを測ると、結果は、その向きで大きさが  $\hbar/2$  か逆の向きで大きさが  $\hbar/2$  になるということである。【特徴 3】は、スピンの向きと測定の向きとの角度が  $\theta$  なら、その測定の向きである確率が  $\cos^2(\theta/2)$  だということである。その結果として、逆向きの確率は  $\cos^2[(\pi - \theta)/2] = \sin^2(\theta/2)$  となる (図 3.1)。【特徴 4】は、状態はスピンの方向で定まるのだが、図 3.2 での  $n$  の方向での  $z$  軸と  $x$  軸の確率分布と、 $z, x$  平面で反転した方向  $n'$  での、 $z$  軸と  $x$  軸の確率分布は同じ確率分布となってしまう。 $z$  軸と  $x$  軸の確率分布だけではどちらの状態かは定まらないのである。それで  $y$  軸での確率分布もわかればどちらの状態かが定まるというわけである。尚、 $y$  軸の確率分布の正確な値まで知る必要はなく、 $y$  軸の正方向と負の方向のどちらの確率が大きいだけで、方向は定まる。

### 3.2 $z$ 方向の表示から $x$ 方向の表示への変換行列を求める

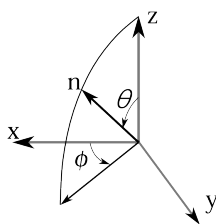


図 3.3 極座標。定義域は  $0 \leq \theta \leq \pi$ 、 $\phi$  は制限なし。

この節では、2.2 節で述べた方法を使って、確率分布から確率振幅と変換行列を求める。まず記号の説明からしよう。方向  $n$  に向いている状態での  $z$  軸方向と  $x$  軸方向の確率分布をそれぞれ  $P(z; n+), P(x; n+)$  と書こう。 $n$  と書かずに  $n+$  としたのは——ここではあまり問題ないのだが——後で  $n$  は  $n+$  と  $n-$  をとる変数として使うので、それと区別するためにそうした。又、方向  $n$  に向いている状態での  $z$  軸方向と  $x$  方向の確率振幅をそれぞれ  $k(z; n+), k(x; n+)$  と書こう\*1。 $z$  は測定変数で、 $\hbar/2$  と  $-\hbar/2$  を取るが、それをそれぞれ  $z+, z-$  と書こう。 $x$  も同様。 $z$  方向表示から  $x$  方向表示への変換行列は  $U_{xz}$  と書こう。方向  $n$  は図 3.3 のように極座標では  $\theta, \phi$  とする。 $0 \leq \theta \leq \pi$  とする。この制限をしないと【特徴 3】の  $\cos^2(\theta/2)$  が成り立たなくなるからである。

今からすることというのは

$$P(z; n+) = |k(z; n+)|^2 \quad (3.1)$$

$$P(x; n+) = |k(x; n+)|^2 \quad (3.2)$$

$$k(x; n+) = \sum_z U_{xz} k(z; n+) \quad (3.3)$$

を、すべての方向  $n$  で満たす  $U_{xz}, k(z; n+), k(x; n+)$  を求めることである。まず、この方程式の前提となる

\*1 通常なら確率振幅は  $\varphi$  や  $\phi$  を使うのだが、極座標の経度で  $\phi$  を使いたいのので  $\phi, \varphi$  を使わなかった。 $k$  を使ったのは、任意のスピン状態は必ず測定状態であり、この論文では測定状態の確率振幅は  $k$  を使っているからである。

確率分布を求めておこう。【特徴3】より、 $z$  方向の確率分布  $P(z; n+)$  は

$$\begin{pmatrix} P(z+; n+) \\ P(z-; n+) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2(\theta/2) \\ \sin^2(\theta/2) \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

である。次に  $x$  方向の確率分布  $P(x; n+)$  を求めよう。 $n$  方向と  $x$  軸とのなす角を  $\theta_x$  と書くと

$$\begin{pmatrix} P(x+; n+) \\ P(x-; n+) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2(\theta_x/2) \\ \sin^2(\theta_x/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 + \cos \theta_x)/2 \\ (1 - \cos \theta_x)/2 \end{pmatrix}$$

である。ここで半角の公式

$$\cos^2(x/2) = (1 + \cos x)/2 \quad \sin^2(x/2) = (1 - \cos x)/2$$

を使った。 $\cos \theta_x$  は  $n$  方向の単位ベクトルの  $x$  成分なので

$$\cos \theta_x = \sin \theta \cos \phi$$

である。だから  $x$  方向の確率分布は

$$\begin{pmatrix} P(x+; n+) \\ P(x-; n+) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 + \sin \theta \cos \phi)/2 \\ (1 - \sin \theta \cos \phi)/2 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

である。この与えられた確率分布で式 (3.1)、(3.2)、(3.3) を満たす  $U_{xz}$  と  $k(z; n+)$  と  $k(x; n+)$  を求めたいわけである。

まず、命題 1.3 より、変換行列の絶対値の 2 乗は  $z$  方向の測定状態での  $x$  方向で取る確率である。つまり

$$|U_{xz}|^2 = \begin{pmatrix} P(x+, z+) & P(x+, z-) \\ P(x-, z+) & P(x-, z-) \end{pmatrix}$$

ということである。 $z$  軸と  $x$  軸のなす角は  $\pi/2$  なので、【特徴3】より、

$$\begin{aligned} |U_{xz}|^2 &= \begin{pmatrix} \cos^2(\pi/4) & \cos^2(\pi/4) \\ \cos^2(\pi/4) & \cos^2(\pi/4) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。2.2 節で述べたように、変換行列は位相の変換すれば特定の行と特定の列をすべて正にできるので、1 行目（これは  $x+$  成分に対応）と 1 列目（これは  $z+$  成分に対応）を正となるようなものとして、

$$U_{xz} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & e^{i\delta} \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

とおいてみよう。ここで  $\delta$  は未知数である。

$n$  方向状態の確率振幅の  $z$  方向表示  $k(z; n+)$  については、その絶対値の 2 乗が確率分布 (3.4) と等しくなるために

$$\begin{pmatrix} k(z+; n+) \\ k(z-; n+) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2)e^{i\lambda} \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

とおいてみよう。ここで  $\lambda$  は未知数である。1 行目 ( $z+$  成分) は正となるものを選んだ。これは、2.2 節でも述べたが、振幅すべての成分に絶対値 1 の数を掛けても式 (3.1)、(3.2)、(3.3) を満たすということとは変わらないので、常に可能である。後は (3.6) と (3.7) を (3.3) の右辺に入れて、 $k(x; n+)$  を未知数  $\delta, \lambda$  で表し、それを (3.2) の右辺に代入して、すべての方向  $n$  で (3.2) が成り立つように未知数  $\delta, \lambda$  を求めることである。

ところで、今の場合、変換行列  $U_{xz}$  はユニタリ行列でなければならないということから  $\delta = \pi$  と求めてしまう。つまり

$$U_{xz} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

と定まってしまう。ただユニタリ行列でなければならないということを使わなくても、上記の手順を踏めば  $\delta$  は求まる。ではそれを淡々と実行して、未知数を求めよう。(3.6) と (3.7) を (3.3) の右辺に入れて、

$$k(x; n+) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & e^{i\delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2)e^{i\lambda} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) + \sin(\theta/2)e^{i\lambda} \\ \cos(\theta/2) + \sin(\theta/2)e^{i(\lambda+\delta)} \end{pmatrix}$$

そして

$$\begin{aligned} |k(x; n+)|^2 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos^2(\theta/2) + \sin^2(\theta/2) + \cos(\theta/2)\sin(\theta/2)(e^{i\lambda} + e^{-i\lambda}) \\ \cos^2(\theta/2) + \sin^2(\theta/2) + \cos(\theta/2)\sin(\theta/2)(e^{i(\lambda+\delta)} + e^{-i(\lambda+\delta)}) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \sin\theta \cos\lambda \\ 1 + \sin\theta \cos(\lambda + \delta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。(3.2) の左辺は (3.5) で与えられているので、方程式 (3.2) は

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \sin\theta \cos\phi \\ 1 - \sin\theta \cos\phi \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \sin\theta \cos\lambda \\ 1 + \sin\theta \cos(\lambda + \delta) \end{pmatrix}$$

となる。この解は、一行目から  $\lambda = \pm\phi$  と求まる。2 行目から、 $\delta = \pi$  と求まる。こうして

$$U_{xz} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

$$k(z; n+) = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2)e^{\pm i\phi} \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

と求まるわけである。解が 2 つあるのは第 2 章で述べたように、互いに複素共役の 2 つのグループがあるからである\*2。

\*2 実のところは、解として  $\pm\phi$  があるのは、幾何学的に見ても (3.5) を見てもわかるように、経度  $\phi$  が  $-\phi$  でも  $x$  方向では同じ確率分布であることも理由の 1 つである。ただこのことを考えるとややこしくなるので考えないことにする。

### 3.3 $z$ 方向から任意の方向への表示の変換行列

今の結果を使って  $z$  方向表示から、任意の方向  $n$  表示への変換行列を求めよう。命題 1.2 より、 $n$  方向表示から  $z$  方向表示への変換行列  $U_{zn}$  は、 $n$  方向の測定状態の  $z$  方向表示、つまり

$$U_{zn} = k(z; n)$$

である。ここで  $n$  は測定変数で  $n_+$  と  $n_-$  をとるとする。極座標で  $n_+$  の向きは  $(\theta_+, \phi_+)$ 、 $n_-$  の向きは  $(\theta_-, \phi_-)$  だとして、 $n_+$  と  $n_-$  は互いに反対の向きなので

$$\theta_- = \pi - \theta_+ \quad \phi_- = \phi_+ + \pi \quad (3.10)$$

の関係にある (図 3.4)。すると (3.9) より

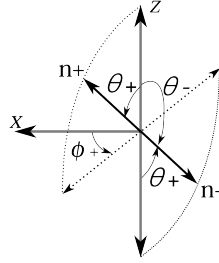


図 3.4

$$\begin{aligned} U_{zn} &= \left( k(z; n_+), k(z; n_-) \right) \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta_+/2) & \cos(\theta_-/2) \\ \sin(\theta_+/2)e^{\pm i\phi_+} & \sin(\theta_-/2)e^{\pm i\phi_-} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。変換行列  $U_{nz}$  はこの転置共役で

$$U_{nz} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_+/2) & \sin(\theta_+/2)e^{\mp i\phi_+} \\ \cos(\theta_-/2) & \sin(\theta_-/2)e^{\mp i\phi_-} \end{pmatrix}$$

である。これを  $n_+$  方向の角度  $\theta_+, \phi_+$  のみで表すと、それを  $\theta, \phi$  と書くが、(3.10) の関係より

$$U_{zn} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & \sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2)e^{\pm i\phi} & -\cos(\theta/2)e^{\pm i\phi} \end{pmatrix} \quad U_{nz} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & \sin(\theta/2)e^{\mp i\phi} \\ \sin(\theta/2) & -\cos(\theta/2)e^{\mp i\phi} \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

である。これはユニタリ行列になっている。ただ  $\pm\phi$  の  $+\phi$  の方を使ったら、もう一方でも  $+\phi$  を使わなければならない、 $-\phi$  を使ったらもう一方でも  $-\phi$  を使わなければならない。

正しい確率分布を示すこと

さて、任意の状態の  $n$  方向表示を考えよう。任意の状態はどこかの向きの測定状態なので、その向きを極座標で  $\theta', \phi'$  として、 $n'$  方向と呼ぼう。すると、その状態の  $z$  方向表示  $k(z; n'+)$  は

$$k(z; n'+) = \begin{pmatrix} \cos \theta' \\ \sin \theta' e^{\pm i\phi'} \end{pmatrix}$$

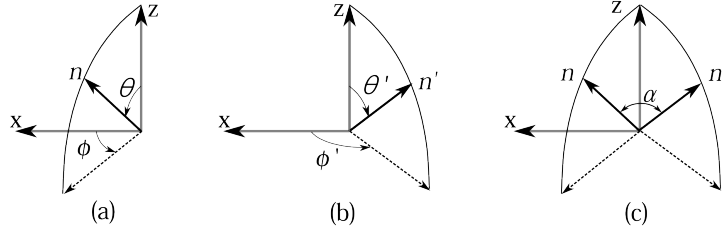


図 3.5

である。この状態の  $n$  方向表示  $k(n; n'+)$  は

$$\begin{aligned}
 k(n; n'+) &= \sum_z U_{nz} k(z; n'+) \\
 &= \begin{pmatrix} \cos(\theta_+/2) & \sin(\theta_+/2)e^{\mp i\phi_+} \\ \cos(\theta_-/2) & \sin(\theta_-/2)e^{\mp i\phi_-} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta' \\ \sin \theta' e^{\pm i\phi'} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos(\theta_+/2) \cos(\theta'/2) + \sin(\theta_+/2) \sin(\theta'/2)e^{\mp i(\phi_+ - \phi')} \\ \cos(\theta_-/2) \cos(\theta'/2) + \sin(\theta_-/2) \sin(\theta'/2)e^{\mp i(\phi_- - \phi')} \end{pmatrix} \quad (3.12)
 \end{aligned}$$

である\*3。

さて、この変換によってできる確率振幅  $k(n; n'+)$  が意味を成すためには、最初にのべた【特徴 3】の

$$|k(n+; n'+)|^2 = \cos^2(\alpha_+/2) \quad |k(n-; n'+)|^2 = \cos^2(\alpha_-/2) \quad (3.13)$$

を満たしていなければならない。ここで  $\alpha_+$  は  $n+$  方向と  $n'$  方向とのなす角。  $\alpha_-$  は  $n-$  方向と  $n'$  方向のなす角。これが成り立つかどうかは決して自明ではない。というのは  $n$  方向状態の  $z$  方向表示の確率振幅は単に式 (3.1)、(3.2)、(3.3) を満たすということだけから求めたのであり、 $z$  方向表示と  $x$  方向表示でだけ【特徴 3】を満たすように決めただけだからである。

さて、それを調べてみよう。そのためには  $n = n+$  のときの

$$|k(n+; n'+)|^2 = \cos^2(\alpha_+/2) \quad (3.14)$$

だけ調べれば十分であり、 $n = n-$  場合まで調べる必要はない。というのは (3.12) の最後の式を見てわかるように、1 行目と 2 行目の違いは  $\theta_+, \phi_+$  が  $\theta_-, \phi_-$  に置き換わっただけであり、 $\theta_+, \phi_+$  は、今からの証明において任意の角度として扱うからである。では、まずこの (3.14) の右辺から計算しよう。  $\theta_+, \phi_+, \alpha_+$  はもう添え字をつけて区別する必要もないので、それぞれ  $\theta, \phi, \alpha$  と書くことにする。方向の関係は図 3.5 のようになる。  $\cos \alpha$  は  $n$  方向と  $n'$  方向の単位ベクトルの内積に等しいので

$$\cos \alpha = \sin \theta \cos \phi \cdot \sin \theta' \cos \phi' + \sin \theta \sin \phi \cdot \sin \theta' \sin \phi' + \cos \theta \cdot \cos \theta'$$

である。半角の公式を使うと

$$\begin{aligned}
 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{1}{2}(1 + \cos \alpha) \\
 &= \frac{1}{2}(1 + \sin \theta \cos \phi \cdot \sin \theta' \cos \phi' + \sin \theta \sin \phi \cdot \sin \theta' \sin \phi' + \cos \theta \cdot \cos \theta') \quad (3.15)
 \end{aligned}$$

\*3 このときも  $\pm\phi$  や  $\mp\phi$  で、 $U_{nz}$  で上の記号を使ったら (今の場合  $-\phi$ )、 $k(z; n'+)$  でも上の記号 (今の場合  $+\phi$ ) を使わなければならないし、 $U_{nz}$  で下の記号を使ったら  $k(z; n'+)$  でも下の記号を使わなければならない。上の計算では実際にそうしているが、そうしないと  $\phi_{\pm} - \phi'$  の部分が  $\phi_{\pm} + \phi'$  になってしまい異なる確率分布になってしまう。

となる。(3.14) の左辺は少し面倒である。(3.12) より

$$\begin{aligned}
& |k(n+; n'+)|^2 \\
&= \left| \cos(\theta/2) \cos(\theta'/2) + \sin(\theta/2) \sin(\theta'/2) e^{\mp i(\phi-\phi')} \right|^2 \\
&= \cos^2(\theta/2) \cos^2(\theta'/2) + \sin^2(\theta/2) \sin^2(\theta'/2) + \cos(\theta/2) \cos(\theta'/2) \sin(\theta/2) \sin(\theta'/2) \left( e^{i(\phi-\phi')} + e^{-i(\phi-\phi')} \right) \\
&= \frac{1 + \cos \theta}{2} \cdot \frac{1 + \cos \theta'}{2} + \frac{1 - \cos \theta}{2} \cdot \frac{1 - \cos \theta'}{2} + \frac{\sin \theta}{2} \cdot \frac{\sin \theta'}{2} \cdot 2 \cos(\phi - \phi') \\
&= \frac{\left[ 1 + \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' (\cos \phi \cos \phi' + \sin \phi \sin \phi') \right]}{2} \\
&= \frac{1}{2} (1 + \sin \theta \cos \phi \cdot \sin \theta' \cos \phi' + \sin \theta \sin \phi \cdot \sin \theta' \sin \phi' + \cos \theta \cdot \cos \theta') \tag{3.16}
\end{aligned}$$

となり、これは (3.15) に等しい。よって (3.14) は成り立つというわけである。なんとも不思議にうまくいっているものである。不思議だと感じるのは私がおその本質を理解していないからであろう。うまく行っているということは、【特徴3】で述べた  $\cos^2(\theta/2)$  が正しいことの間接的根拠になっていると思う。 $\cos^2(\theta/2)$  でなかったらうまく行かないのではないか。

#### $z$ 方向から $x$ 方向、 $y$ 方向への変換行列

さて、 $z$  方向表示から  $x$  方向表示への変換行列  $U_{xz}$  は、すでに求めたように (3.8) である。 $z$  方向表示から任意の方向の  $n$  方向表示への変換行列は (3.11) であり、再掲すると

$$U_{nz} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & \sin(\theta/2)e^{\mp i\phi} \\ \sin(\theta/2) & -\cos(\theta/2)e^{\mp i\phi} \end{pmatrix}$$

である。 $x$  方向は  $\theta = \pi/2, \phi = 0$  なので代入すると

$$U_{xz} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

となり、(3.8) と等しくなってくれている。これはたまたまで、詳しいことは省くが、(3.7) の確率振幅で1行目の  $z+$  成分を  $\cos(\theta/2)$  と正に設定したからである。 $y$  方向表示への変換は  $\theta = \pi/2, \phi = \pi/2$  として、 $\mp\phi$  で  $-\phi$  の方を使うと\*4、

$$\begin{aligned}
U_{yz} &= \begin{pmatrix} \cos(\pi/4) & \sin(\pi/4)e^{-i\pi/2} \\ \sin(\pi/4) & -\cos(\pi/4)e^{-i\pi/2} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \tag{3.17}
\end{aligned}$$

となる。

\*4 こちらのほうが時間発展方程式の関係から正しい位相だからである (3.4 節参照)。

### 3.4 時間発展方程式との関係

(3.9) の確率振幅  $k(z; n+)$  は

$$k(z; n+) = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2)e^{\pm i\phi} \end{pmatrix}$$

と  $\phi$  と  $-\phi$  の2つあった。これは2.4節で述べたように時間発展方程式と関係がある。どちらが

$$i\hbar \frac{d\varphi_\varepsilon}{dt} = \varepsilon \varphi_\varepsilon$$

に合っているのかを調べよう。ここで  $\varphi_\varepsilon$  はエネルギー表示での確率振幅。

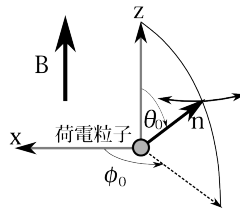


図 3.6

今スピン 1/2 の荷電粒子が一様な磁場  $B > 0$  の中にあるとし、 $z$  方向を磁場の向きに取るとしよう (図 3.6)。この場合、エネルギー測定値  $\varepsilon$  は、CGS ガウス単位系で

$$\varepsilon = \begin{cases} -\frac{q}{mc} B \left( \frac{\hbar}{2} \right) \\ -\frac{q}{mc} B \left( -\frac{\hbar}{2} \right) \end{cases}$$

の2つだと考えられる。ここで  $q$  は電荷、 $m$  は質量、 $c$  は光速。そしてエネルギー測定値が  $\varepsilon = -\frac{q}{mc} B \left( \frac{\hbar}{2} \right)$  のエネルギー測定状態というのは、磁場の方向である  $z+$  方向の状態であり、エネルギー測定値が  $\varepsilon = -\frac{q}{mc} B \left( -\frac{\hbar}{2} \right)$  のエネルギー測定状態というのは、 $z-$  方向の状態であると考えられる。エネルギーの原点を  $-\frac{q}{mc} B \left( \frac{\hbar}{2} \right)$  とすると、 $z+$  状態ではエネルギーは0、 $z-$  状態ではエネルギーは  $\frac{q}{mc} B \hbar$  となる。エネルギー表示でもあり  $z$  方向表示でもある時間発展方程式は、時刻  $t$  での  $z+$  方向の確率振幅を  $k_+(t)$ 、 $z-$  方向の確率振幅を  $k_-(t)$  とし、 $\frac{qB}{mc} = a$  とおいて、

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{dk_+(t)}{dt} &= 0 \cdot k_+(t) \\ i\hbar \frac{dk_-(t)}{dt} &= a\hbar \cdot k_-(t) \end{aligned}$$

となる。時刻  $t = 0$  で、図 3.6 のように極座標で  $\theta_0, \phi_0$  を向いているとすると、時刻  $t$  での解は

$$\begin{aligned} k_+(t) &= k_+(0) = \cos(\theta_0/2) \\ k_-(t) &= k_-(0)e^{-at} = \sin(\theta_0/2)e^{i(\pm\phi_0 - at)} \end{aligned}$$



となる。今電荷が正  $q > 0$  とすると  $a = \frac{qB}{mc} > 0$  となる。この場合  $\pm\phi$  のうち、 $+\phi$  を採用するなら、経度という意味での  $\phi$  は減る方向に動く。 $-\phi$  なら増える方向に動く。それで現実に合う方が決まる。尚、古典電磁気学から類推すると、この状況では経度が減る方向へ回転する——その理由は難しくないのだが省略する——ので、おそらくこの時間発展方程式に合う確率振幅は  $+\phi$  の方であろう。つまり

$$k(z; n+) = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2)e^{i\phi} \end{pmatrix}$$

の方が現実に合う。

### 3.5 まとめ

この章での計算結果をまとめて書いておこう。間の角が  $\theta$  であるときの確率が  $\cos^2(\theta/2)$  であることを使って、確率分布団を求め、 $z$  方向表示から  $x$  方向表示への変換行列が

$$U_{xz} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

となること、任意の  $n+$  状態の  $z$  方向表示が、 $n$  方向は極座標で  $\theta, \phi, 0 \leq \theta \leq \pi$  として、

$$k(z; n+) = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2)e^{\pm i\phi} \end{pmatrix}$$

であることを求めた。尚、これは  $\theta = 0, \pi$  で連続でない。時間発展方程式と合うのは  $\pm\phi$  の  $+\phi$  の方であった。そしてこの方向から  $z$  方向表示への変換行列とその逆は、 $+\phi$  の方で、

$$U_{zn} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & \sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2)e^{i\phi} & -\cos(\theta/2)e^{i\phi} \end{pmatrix} \quad U_{nz} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & \sin(\theta/2)e^{-i\phi} \\ \sin(\theta/2) & -\cos(\theta/2)e^{-i\phi} \end{pmatrix}$$

であった。 $x$  方向表示と  $z$  方向表示の変換行列は

$$U_{zx} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad U_{xz} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

であり、 $y$  方向表示と  $z$  方向表示の変換行列は

$$U_{zy} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \quad U_{yz} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

であった。

### 3.6 補足——変換行列と確率振幅の他の表現

2.1 節で述べたように、確率振幅と変換行列には任意性がある。それで補足としてこの章で求めた変換行列と確率振幅を別のものでも表してみよう。 $(\theta, \phi)$  方向の  $z$  方向表示

$$k(z; \theta, \phi) = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2)e^{i\phi} \end{pmatrix}$$

というのは対称性がよくない。それで新しい表示として

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta/2)e^{-i\phi/2} \\ \sin(\theta/2)e^{i\phi/2} \end{pmatrix}$$

となるようにしたい。

### 1 回目の変換

そこで、 $(\theta, \phi)$  状態の確率振幅はいろんな方向の表示があるわけだが、その—— $z$  方向表示も含め——すべての表示に  $e^{-i\phi/2}$  を掛けよう。すると  $(\theta, \phi)$  状態の  $z$  方向表示は

$$k'(z; \theta, \phi) = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2)e^{-i\phi/2} \\ \sin(\theta/2)e^{i\phi/2} \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

になってくれる。この新しい確率振幅は  $k'$  とダッシュを付けて元々のものと区別することにする。この操作はすべての表示に対して絶対値が 1 である定数  $e^{-i\phi/2}$  を掛けるパターンであり、変換行列  $U$  はそのままよい。状態が変われば  $\phi$  も変化するので、状態ごとに掛ける数が変わることに注意。例えば  $\phi = 45^\circ$  の状態に対しては、すべての表示の確率振幅に  $e^{-i(\pi/4)/2}$  を掛けるし、 $\phi = 90^\circ$  の状態に対しては、すべての表示の確率振幅に  $e^{-i(\pi/2)/2}$  を掛けることになる (図 3.7)。ところで、今、元の確率振幅に  $e^{-i\phi/2}$  を掛けて新しい確率

	$z$ 方向表示	$x$ 方向表示
$(\theta, \pi/4)$ 方向の状態	$\exp[-i(\pi/4)/2] \times \begin{pmatrix} k(z+; \theta, \pi/4) \\ k(z-; \theta, \pi/4) \end{pmatrix}$	$\exp[-i(\pi/4)/2] \times \begin{pmatrix} k(x+; \theta, \pi/4) \\ k(x-; \theta, \pi/4) \end{pmatrix}$
$(\theta, \pi/2)$ 方向の状態	$\exp[-i(\pi/2)/2] \times \begin{pmatrix} k(z+; \theta, \pi/2) \\ k(z-; \theta, \pi/2) \end{pmatrix}$	$\exp[-i(\pi/2)/2] \times \begin{pmatrix} k(x+; \theta, \pi/2) \\ k(x-; \theta, \pi/2) \end{pmatrix}$

図 3.7 1 回目の変換。経度が  $\phi$  である状態には  $e^{-i\phi/2}$  をすべての表示に掛ける。

振幅を作り出したわけだが、この  $\phi$  の定義域を明確にしておかないと、いったい何を掛けたかわからなくなるし、その新しい確率振幅自体もどういう値なのかわからなくなる。というのは  $\phi$  と  $\phi + 2\pi$  は同じ方向を指すが、 $e^{-i(\phi+2\pi)/2} \neq e^{-i\phi/2}$  というように値が異なるからである。 $\phi$  の定義域は範囲が  $2\pi$  ならなんでもいいが、 $0 \leq \phi < 2\pi$  や  $-\pi \leq \phi < \pi$  ぐらいを使うのがいいのではないかと思う。このように (3.18) の表し方だと、少しややこしいところもあるが、1 行目と 2 行目で角度  $\phi$  についての対称性はよくなる。

### 対称性について

この対称性に関して少し補足しよう。まず  $(\theta, \phi)$  方向を改めて  $\theta_{z+}, \phi_{z+}$  と書き直そう。これは  $z$  の正方向と  $x$  軸を基軸とした極座標だと言える。又、この  $(\theta, \phi)$  方向を、 $z$  の負方向と  $x$  軸を基軸とした極座標で表したものを  $\theta_{z-}, \phi_{z-}$  と書くとしよう (図 3.8)。このとき  $\phi_{z-} = -\phi_{z+}$  の関係にある。というのは  $z$  の負方向の

軸と  $x$  を基軸とすると回転の正の向きが逆になるからである (図 3.8)。又、 $\theta_{z-} = \pi - \theta_{z+}$  である (図 3.8)。だから (3.18) は

$$k'(z; \theta, \phi) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_{z+}/2)e^{-i\phi_{z+}/2} \\ \cos(\theta_{z-}/2)e^{-i\phi_{z-}/2} \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

となり、1 行目の  $z+$  状態の役割と 2 行目の  $z-$  状態の役割が全く同じになる。

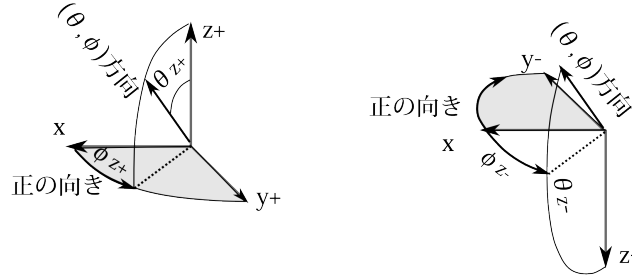


図 3.8

## 2 回目の変換

少し脱線してしまったが、話を戻そう。今  $n+$  方向というのは  $(\theta_+, \phi_+)$  方向を向いているとしよう。そして  $n-$  方向は  $n+$  の逆向きで  $(\theta_-, \phi_-)$  方向だとしよう。 $n+$  状態と  $n-$  状態の、 $n$  表示は元々は

$$k(n; n+) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad k(n; n-) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

であったが、この新たな確率振幅だと (ダッシュ付きの方)  $n+$  状態のすべての表示に  $e^{-i\phi_+/2}$  を掛け、 $n-$  状態のすべての表示に  $e^{-i\phi_-/2}$  を掛けたのだから

$$k'(n; n+) = \begin{pmatrix} e^{-i\phi_+/2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad k'(n; n-) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-i\phi_-/2} \end{pmatrix}$$

となる。これでも物理としては全く問題ないのだが、測定状態のその物理量での表示なので、できたら (3.20) のように標準的な形になって欲しい。そこで 2.1 節で行った変換行列も含めた変換 (式 (2.3)、式 (2.4) 参照) をほどこそう。任意の状態  $\lambda$  での  $n$  表示の確率振幅  $k'(n; \lambda)$  から、新たな確率振幅  $k''(n; \lambda)$  を

$$k''(n; \lambda) = \begin{pmatrix} e^{i\phi_+/2} \times k'(n; \lambda) \\ e^{i\phi_-/2} \times k'(n; \lambda) \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

というように作る。こうすれば  $\lambda = n+$ 、 $\lambda = n-$  のときそれぞれ

$$k''(n; n+) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad k''(n; n-) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

になってくれる。この変換は表示ごとにあらゆる状態に対して同じ変換をするのであり、例えば  $x$  方向表示な

	x方向表示 $\phi_+=0$ $\phi_-=\pi$	z方向表示 $\phi_+=0$ $\phi_-=0$
$\lambda_1$ 状態	$\begin{pmatrix} \exp(i\cdot 0/2) \times k'(x+; \lambda_1) \\ \exp(i\pi/2) \times k'(x-; \lambda_1) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \exp(i\cdot 0/2) \times k'(z+; \lambda_1) \\ \exp(i\cdot 0/2) \times k'(z-; \lambda_1) \end{pmatrix}$
$\lambda_2$ 状態	$\begin{pmatrix} \exp(i\cdot 0/2) \times k'(x+; \lambda_2) \\ \exp(i\pi/2) \times k'(x-; \lambda_2) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \exp(i\cdot 0/2) \times k'(z+; \lambda_2) \\ \exp(i\cdot 0/2) \times k'(z-; \lambda_2) \end{pmatrix}$

図 3.9 2 回目の変換。表示方向の経度が  $\phi$  なら、すべての状態に対して  $e^{i\phi/2}$  を掛ける。

ら  $\phi_+ = 0, \phi_- = \pi$  なので (経度  $\phi$  の定義域が  $0 \leq \phi < 2\pi$  のとき)、すべての状態  $\lambda$  に対して

$$k''(x; \lambda) = \begin{pmatrix} e^{i\cdot 0/2} \times k'(x+; \lambda) \\ e^{i\pi/2} \times k'(x-; \lambda) \end{pmatrix}$$

と変換されるし (図 3.9)、 $z$  方向表示なら  $\phi_+ = 0, \phi_- = 0$  なので

$$k''(z; \lambda) = \begin{pmatrix} e^{i\cdot 0/2} \times k'(z+; \lambda) \\ e^{i\cdot 0/2} \times k'(z-; \lambda) \end{pmatrix}$$

となる (図 3.9)。つまり

$$k''(z; \lambda) = k'(z; \lambda)$$

と  $z$  方向表示は (3.18) のままであってくれる。あとはこれに合わせて変換行列を変えればよい。今興味があるのは任意の  $n$  方向から  $z$  方向への変換行列である。それは図 3.10 のように  $U_{zn}$  の 1 列目 (これは  $n+$  に相

$$\begin{pmatrix} k'(z+; \lambda) \\ k'(z-; \lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(-i\frac{\phi_+}{2}) & \exp(-i\frac{\phi_-}{2}) \\ U(z+, n+) & U(z+, n-) \\ U(z-, n+) & U(z-, n-) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp(i\frac{\phi_+}{2}) \times k'(n+; \lambda) \\ \exp(i\frac{\phi_-}{2}) \times k'(n-; \lambda) \end{pmatrix}$$

図 3.10 変換行列の変換。 $z$  方向表示は変化ないので行には何も掛けない。

当)に  $e^{-i\phi_+/2}$  を、2 列目 (これは  $n-$  に相当)に  $e^{-i\phi_-/2}$  を掛ければよい。となると新たな変換行列  $U'_{zn}$  は

$$U'_{zn} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_+/2)e^{-i\phi_+/2} & \cos(\theta_-/2)e^{-i\phi_-/2} \\ \sin(\theta_+/2)e^{i\phi_+/2} & \sin(\theta_-/2)e^{i\phi_-/2} \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

となる。これは (3.18) と比較すればわかるように、単に  $n+$  状態の  $z$  方向表示である  $k'(z; n+)$  と、 $n-$  状態の  $z$  方向表示である  $k'(z; n-)$  を並べたもの、つまり

$$U'_{zn} = \left( k'(z; n+), k'(z; n-) \right) \quad (3.23)$$

になっている。というよりもなっているべきだったのである。しかしそうあるべきだからと言って、いきなりこの2つを並べて変換行列を作っただけではその正しさがわからない。というのはこの変換行列によって作り出される新たな確率振幅が、3.3節で述べたように、正しい確率分布を与えること（確率が $\cos^2$ (狭角/2)となること。式(3.13)参照)を示さなければならないからである。しかし今のように2.1節で述べた確率振幅と変換行列の変換の手続きをふめば、この新しい確率振幅に対応する確率分布は変わらないので、改めて確認する必要はないのである。

### 再び対称性について

尚、再び脱線するが $U'_{zn}$ は(3.23)であり、(3.19)のように $z$ の正の軸、負の軸から見た角度を使って表すと

$$U'_{zn} = \begin{pmatrix} \cos[\theta(n+, z+)/2]e^{-i\phi(n+, z+)/2} & \cos[\theta(n-, z+)/2]e^{-i\phi(n-, z+)/2} \\ \cos[\theta(n+, z-)/2]e^{-i\phi(n+, z-)/2} & \cos[\theta(n-, z-)/2]e^{-i\phi(n-, z-)/2} \end{pmatrix}$$

となる。ここで、例えば $\phi(n+, z-)$ と言うのは $z-$ 軸から見た $n+$ 方向の経度という意味である。他も同様。だから $n$ 方向表示から基軸となる $z$ 方向への表示の変換成分は

$$U'_{zn} = \cos[\theta(n, z)/2]e^{-i\phi(n, z)/2}$$

である。ここで $n$ は $n+, n-$ を取る変数。 $z$ も $z+, z-$ を取る変数。又、基軸である $z$ 方向表示から $n$ 方向への表示の変換成分はこの複素共役である

$$U'_{nz} = \cos[\theta(n, z)/2]e^{i\phi(n, z)/2}$$

となる。又、ついでながら書いておくと、 $n$ 方向状態の $z$ 方向表示は

$$k(z; n) = \cos[\theta(n, z)/2]e^{-i\phi(n, z)/2}$$

である。このように、正方向、負方向の区別もなく対称性があり物理的にすっきりする。しかしながら、この極座標の $(\theta, \phi)$ というのは、 $z$ 方向から見た角度であり、 $n$ 方向から見た角度ではない。その点では対称性はない。

### 具体的な変換行列

さて話を元に戻すが、この(3.22)の $\theta_-, \phi_-$ を消去し、 $\theta_+, \phi_+$ で表しておこう。 $\theta$ に関しては $\theta_- = \pi - \theta_+$ でいいのだが、 $\phi$ に関しては、 $\phi$ の定義域と $\phi_+$ の値によって $\phi_- = \phi_+ + \pi$ の場合と $\phi_- = \phi_+ - \pi$ の場合がある。それをまとめて $\phi_- = \phi_+ \pm \pi$ と書いておこう。これらを使って(3.22)を $+$ 方向の角度で表し、さらに $+$ の添字も省くと

$$U'_{zn} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2)e^{-i\phi/2} & \mp i \sin(\theta/2)e^{-i\phi/2} \\ \sin(\theta/2)e^{i\phi/2} & \pm i \cos(\theta/2)e^{i\phi/2} \end{pmatrix} \quad U'_{nz} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2)e^{i\phi/2} & \sin(\theta/2)e^{-i\phi/2} \\ \pm i \sin(\theta/2)e^{i\phi/2} & \mp i \cos(\theta/2)e^{-i\phi/2} \end{pmatrix}$$

となる。又 $n$ 方向として $x$ 方向をとるなら変換行列は、 $\theta = \pi/2, \phi = 0$ を入れ、

$$U'_{zx} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & \mp i \\ 1 & \pm i \end{pmatrix} \quad U'_{xz} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \pm i & \mp i \end{pmatrix}$$

となる。尚、 $\phi$  の定義域として  $0 \leq \phi < 2\pi$  とするなら、 $x$  軸方向は  $\phi_+ = 0, \phi_- = \pi$  なので、 $\phi_- = \phi_+ + \pi$  であり、上の符号の方である。 $-\pi \leq \phi < \pi$  とするなら、 $\phi_- = \phi_+ - \pi$  であり、下の符号の方である。又  $n$  方向として  $y$  方向をとるなら、変換行列は、 $\theta = \pi/2, \phi = \pi/2$  を入れ、

$$U'_{zy} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-i & \mp(1+i) \\ 1+i & \pm(-1+i) \end{pmatrix} \quad U'_{yz} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ \mp(1-i) & \pm(-1-i) \end{pmatrix}$$

となる。

### まとめ

話が脱線したりして長くなってしまったが、実際行ったことは単純なことである。それを簡潔にまとめておこう。状態  $\lambda$  の経度は  $\phi_\lambda$  だとする。その状態  $\lambda$  の  $n$  方向表示確率振幅  $k(n; \lambda)$  をまず

$$k'(n; \lambda) = e^{-i\phi_\lambda/2} k(n; \lambda)$$

と変換する。変換行列はそのままである。次に  $n$  方向表示の確率振幅を変換するが、 $n_+$  方向の経度を  $\phi_{n_+}$ 、 $n_-$  方向の経度を  $\phi_{n_-}$  とし、 $n$  を  $n_+$  と  $n_-$  をとる変数と考えて、これをまとめて  $\phi_n$  と書くことにする。これを使って  $n$  方向表示を

$$k''(n; \lambda) = e^{i\phi_n/2} k'(n; \lambda)$$

と変換する。これに合わせて  $n$  方向表示から  $n'$  方向表示への変換行列  $U_{n'n}$  を変換する。 $n'$  方向の経度は  $\phi_{n'}$  とする。ここでの  $n'$  は  $n'_+$  と  $n'_-$  をとる変数。これを使って  $U_{n'n}$  を

$$U'_{n'n} = e^{i\phi_{n'}/2} U_{n'n} e^{-i\phi_n/2}$$

と変換する。結局、最初の確率振幅  $k(n; \lambda)$ 、変換行列  $U_{n'n}$  からは

$$k''(n; \lambda) = e^{i(\phi_n - \phi_\lambda)/2} k(n; \lambda) \quad U'_{n'n} = e^{i\phi_{n'}/2} U_{n'n} e^{-i\phi_n/2}$$

という変換を行ったということである。その結果  $(\theta, \phi)$  方向の  $z$  方向表示が<sup>3</sup>

$$k''(z; \theta, \phi) = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2)e^{-i\phi/2} \\ \sin(\theta/2)e^{i\phi/2} \end{pmatrix}$$

となり、 $(\theta, \phi)$  方向表示から  $z$  方向表示への変換行列が

$$U'_{z;\theta,\phi} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2)e^{-i\phi/2} & \mp i \sin(\theta/2)e^{-i\phi/2} \\ \sin(\theta/2)e^{i\phi/2} & \pm i \cos(\theta/2)e^{i\phi/2} \end{pmatrix}$$

となったわけである。ここでの  $\pm$  や  $\mp$  は、表示の向きの正方向と逆方向の経度の関係が  $\phi_- = \phi_+ \pm \pi$  となることによるもの。

## 第 4 章

# 固有ベクトル法—固有ベクトルと変換行列

この章では固有ベクトルの方法を使って、変換行列を求める。尚、固有ベクトル法というのは私が勝手にそう呼んでいるだけで、世間ではこんな名称は通用しない、正準量子化法といわれているのかもしれないが、正準量子化法というのは単に演算子の設定の仕方に対する呼び方だと思うので、概念的に違う感じがする。もともとの定義では変換行列は確率分布の関数として求められるべきものであった。しかし、自然界に存在する確率分布を見つけ出すのは困難なので、この方法で変換行列を推測しようというわけである。この方法で変換行列を求めることによって量子力学の体系は完成する。ただスピンにはこの方法は通用しない。まず変換行列の求める手続きを述べたあと、この方法によって求めた変換行列を使えば、物理量の平均値が古典力学を再現することを述べる。

### 4.1 演算子

今から述べる演算子というのは確率振幅に作用させる演算子のことである。確率振幅に作用させて、別の量子力学的状態へ写像するのかといえば、そんなことはなく、単に固有ベクトルと固有値を求めるための便宜である。

直交座標で考え、位置座標の  $x_i$  成分の演算子とそれに対応する運動量の  $p_i$  成分の演算子を定義する。直交座標としたのは、曲線座標だとまづいかないからである。今は 1 粒子に話を限定しない。 $x_i$  成分の演算子を  $\hat{x}_i$  と書こう。又  $p_i$  成分の演算子を  $\hat{p}_i$  と書こう。 $\hat{x}_i, \hat{p}_i$  は位置の確率振幅  $\psi(x)$  に作用させると

$$\text{位置 } \hat{x}_i \psi(x) \equiv x_i \psi(x) \quad \text{運動量 } \hat{p}_i \psi(x) \equiv \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_i} \psi(x) \quad (4.1)$$

となるように定義する。これは演算子の位置表示であり、運動量や他の物理量の確率振幅に作用させるときは、演算子の表示はそれに応じて変化する。

他の物理量の演算子については、その物理量を位置と運動量の関数で表わし、その位置と運動量を今定義した演算子で置き換えるという方法で決める。例えばエネルギーなら、位置と運動量で

$$\sum_i \frac{p_i^2}{2m_i} + V(x)$$

と表される。ここの位置と運動量を (4.1) で定義したもので置き換えると、エネルギー演算子は

$$\sum_i \frac{1}{2m_i} \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^2 + V(x) \quad (4.2)$$

となるわけである。ただ磁場のある場合はこの形ではなく、古典力学のハミルトニアンは、ベクトルポテンシャル  $A_i(x)$ 、スカラーポテンシャル  $\phi(x)$ 、 $q$  を電荷、 $c$  を光速、CGS ガウス単位系として、

$$\frac{1}{2m} \sum_{i=1}^3 \left( p_i - \frac{q}{c} A_i(x) \right)^2 + q\phi(x)$$

である。これは 1 粒子の場合である。2 粒子以上の場合は記号が煩雑になるので、この論文では、この形のハミルトニアンに関しては 1 粒子の場合だけ扱う。この場合のエネルギー演算子は

$$\frac{1}{2m} \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{q}{c} A_i(x) \right)^2 + q\phi(x) \quad (4.3)$$

となる。

角運動量の  $x$  成分  $l_x$  なら、古典力学では

$$l_x = y p_z - z p_y$$

と表されるので、この位置と運動量を (4.1) で定義したもので置き換えると

$$y \cdot \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial z} \right) - z \cdot \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

となるわけである。置き換える際に演算子の順序に注意しなければならない。角運動量の  $x$  成分の 2 乗  $l_x^2$  は

$$(y p_z - z p_y)(y p_z - z p_y) = y p_z y p_z - y p_z z p_y - z p_y y p_z + z p_y z p_y$$

である。ここで、例えば  $y p_z z p_y$  の項は古典力学では  $yz p_z p_y$  でも同じだが、演算子にすると掛ける順序によって結果が異なる。ではどういう順序が正しいのかというと、それには決まった規則はない。ただ単に実験的に正しい変換行列となる順序が正しいとしかいいようがない。 $l_x^2$  に関して言えば最初の  $(y p_z - z p_y)(y p_z - z p_y)$  の段階で演算子に置き換えるとうまくいくようである。

## 4.2 固有ベクトル

さて、この演算子を使っていかにして変換行列を求めるかというと、簡単に言えばこの演算子に含まれる変数の固有関数がこの物理量からその変数への変換行列になるというだけである。そして測定値は固有値となる値しか現れない。尚、関数はベクトルの一種なのでより一般的な言葉として「固有ベクトル法」としたのである。これだけでは何のことかわからないと思うので、具体例で説明していこう。

### 運動量

まず、運動量から説明する。運動量の  $p_i$  成分から位置の  $x_i$  成分への変換行列を求める。運動量  $p_i$  成分の演算子は  $x_i$  しか含んでいないのでその固有関数は  $x_i$  のみの関数である。運動量演算子  $\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_i}$  の固有値  $p_i$  である規格化した固有関数  $k(x_i; p_i)$  が運動量の値  $p_i$  の確率振幅から、位置の値  $x_i$  の確率振幅への変換成分となる。尚、運動量演算子の固有値  $p_i$  の固有関数は規格化を除くと

$$k(x_i; p_i) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} x_i p_i\right)$$



である。変換行列はユニタリーでなければならないので、逆変換は  $k^*(x_i, p_i)$  である。例えば 1 粒子系で  $p_x$  から  $x$  への変換は

$$\psi(x, p_y, p_z) = \sum_{p_x} k(x; p_x) \cdot \varphi(p_x, p_y, p_z)$$

となる。これを  $y, z$  成分でも繰り返すと

$$\psi(x, y, z) = \sum_{p_x, p_y, p_z} \left[ k(x; p_x) \cdot k(y; p_y) \cdot k(z; p_z) \right] \cdot \varphi(p_x, p_y, p_z)$$

となる。  $k(x; p_x) \cdot k(y; p_y) \cdot k(z; p_z)$  が運動量  $p_x, p_y, p_z$  から位置  $x, y, z$  への変換行列である。

### 角運動量

次に角運動量の場合について説明しよう。角運動量の  $z$  成分の演算子  $\hat{l}_z$  は

$$\hat{l}_z = x \cdot \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial y} \right) - y \cdot \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

であるが、これは極座標  $r, \theta, \phi$  で表すと、計算は省くが、

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

となる。この演算子は  $\phi$  しか含んでいないので固有関数は  $\phi$  のみの関数である。この演算子の固有値  $l_z$  のときの固有関数  $k(\phi; l_z)$  は

$$k(\phi; l_z) = \exp\left(\frac{il_z \phi}{\hbar}\right)$$

となる。経度  $\phi$  が一回転して、 $2\pi$  増えても連続であるためには、固有値  $l_z$  は  $\hbar$  の整数倍でなければならない。そしてその測定値はこの固有値しか現れない。  $\hat{l}_z$  が  $\phi$  しか含んでいないので、  $l_z$  は  $\phi$  とのみ変換する。  $l_z$  から  $\phi$  への変換は、規格化を無視すると、

$$\psi(r, \theta, \phi) = \sum_{l_z} k(\phi; l_z) \varphi(r, \theta, l_z)$$

と変換される。角運動量の 2 乗の演算子は、極座標  $r, \theta, \phi$  で表すと、計算は省くが、

$$\hat{l}_x^2 + \hat{l}_y^2 + \hat{l}_z^2 = -\hbar^2 \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right]$$

となる。この演算子は  $\theta, \phi$  しか含まないので固有関数は  $\theta, \phi$  のみの関数である。だから角運動量の 2 乗の固有値  $\kappa$  の固有関数  $k(\theta, \phi; \kappa)$  は  $\kappa$  から  $\theta, \phi$  への変換行列となる。この固有関数は縮退——同じ固有値  $\kappa$  でもいくつかの独立した関数があること——しており、球面調和関数  $Y_l^m(\theta, \phi)$  として知られている。ここで指標  $l$  は  $\kappa$  と

$$\hbar^2 l(l+1) = \kappa \quad l = 0, 1, 2, 3, \dots$$

という関係にある。又、指標  $m$  は角運動量の  $z$  成分  $l_z$  と

$$m\hbar = l_z \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad |m| \leq l$$

という関係にある。角運動量の絶対値の 2 乗が同じでも角運動量の  $z$  成分が異なると固有関数が異なることになる。詳しくはほとんどの量子力学の教科書にでている。そして  $\kappa, l_z$  から  $\theta, \phi$  への変換は

$$\psi(r, \theta, \phi) = \sum_{\kappa, l_z} Y_l^m(\theta, \phi) \varphi(r, \kappa, l_z)$$

という変換になる。

## エネルギー

最後にエネルギーについて説明しよう。エネルギー演算子はすでに述べたように (4.2) 式や (4.3) 式であるが、再掲すると

$$-\sum_i \frac{\hbar^2}{2m_i} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + V(x) \quad \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{q}{c} A_i(x) \right)^2 + q\phi(x)$$

である。これは位置変数  $x_i$  すべてを含んでいるので、固有値  $\varepsilon$  での固有関数  $k(x; \varepsilon)$  がエネルギー表示から位置  $x$  表示への変換行列となる。1.8 節で述べたように、変換行列が決まれば位置表示のハミルトニアン  $H_{xx'}$  が決まるということであり、位置の確率振幅の時間発展方程式が決まる。それは

$$i\hbar \frac{d\psi_x}{dt} = \sum_{x'} H_{xx'} \psi_{x'} \quad H_{xx'} = \sum_{\varepsilon} k(x; \varepsilon) \cdot \varepsilon \cdot k^*(x'; \varepsilon)$$

である。ところで、このハミルトニアンとエネルギー演算子に関して以下の命題が成り立つ。

**命題 4.1** エネルギー演算子は位置表示のハミルトニアン  $H_{xx'}$  に等しい。つまり

$$-\sum_i \frac{\hbar^2}{2m_i} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + V(x) = \sum_{\varepsilon} k(x; \varepsilon) \cdot \varepsilon \cdot k^*(x'; \varepsilon) \quad (\text{磁場のない場合}) \quad (4.4)$$

$$\frac{1}{2m} \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{q}{c} A_i(x) \right)^2 + q\phi(x) = \sum_{\varepsilon} k(x; \varepsilon) \cdot \varepsilon \cdot k^*(x'; \varepsilon) \quad (\text{磁場のある場合})$$

である。

その理由というのは、これは線形代数学の復習なのだが、(4.4) の左辺というのは位置の確率振幅に作用しているのだから、エネルギー演算子の位置表示だと言える。エネルギー表示にするには

$$\sum_x k^*(x; \varepsilon) \left( -\sum_i \frac{\hbar^2}{2m_i} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + V(x) \right) k(x; \varepsilon') \quad (4.5)$$

とすればよい。  $k(x; \varepsilon)$  は固有関数なのだから

$$\left( -\sum_i \frac{\hbar^2}{2m_i} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + V(x) \right) k(x; \varepsilon') = \varepsilon' k(x; \varepsilon')$$

である。だから (4.5) は

$$\sum_x k^*(x; \varepsilon) \cdot \varepsilon' \cdot k(x; \varepsilon')$$

となる。  $k(x; \varepsilon)$  はユニタリーのはずだから

$$\sum_x k^*(x; \varepsilon) \cdot \varepsilon' \cdot k(x; \varepsilon') = \delta_{\varepsilon\varepsilon'}$$

となる。結局エネルギー演算子のエネルギー表示は

$$\sum_x k^*(x; \varepsilon) \left( -\sum_i \frac{\hbar^2}{2m_i} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + V(x) \right) k(x; \varepsilon') = \delta_{\varepsilon\varepsilon'}$$

と対角成分が  $\varepsilon$  である対角行列になる。一方 (4.4) の右辺というのは元々エネルギー表示で対角成分が  $\varepsilon$  である対角行列  $\delta_{\varepsilon\varepsilon'}$  を位置表示に変換したものである。つまり、(4.4) の左辺も右辺もエネルギー表示では対角成分が  $\varepsilon$  の対角行列だということである。だから当然、それを位置表示にしたものも等しいというわけである。そういうわけで位置表示の時間発展方程式は

$$i\hbar \frac{d\psi_x}{dt} = \left( -\sum_i \frac{\hbar^2}{2m_i} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + V(x) \right) \psi_x$$

となる。磁場のある場合の証明も全く同様である。尚、今はエネルギー演算子のエネルギー表示は、対角成分がエネルギー固有値である対角行列になることを示したが、この議論は他の物理量でも成り立つことで、一般に

**命題 4.2** 物理量  $B$  の演算子の  $B$  表示は、対角成分が固有値  $b$  である対角行列  $\delta_{bb'}$  になる

と言える。

まとめ

運動量についてはどんな系でも変換行列は  $e^{\frac{i}{\hbar}x \cdot p}$  であり、わざわざ演算子やら、固有値やら、そんなややこしいことを持ち出さなくても単に変換行列は  $e^{\frac{i}{\hbar}x \cdot p}$  だというだけの話である。角運動量も同様である。ただ、演算子を使うと、後で述べる古典論との対応を示すには便利ではある。一方、エネルギーから位置への変換行列は系によって異なるので、今述べた方法はエネルギーから位置への変換行列を求めるのに極めて有効なのである。今まで述べた固有ベクトル法というものを一般的に言い表すと以下のようになる。

物理量  $B$  の演算子は位置変数  $\alpha$  で表され、その固有値  $b$  のときの固有関数が  $k(\alpha; b)$  のとき、つまり、

$$\hat{B} \cdot k(\alpha; b) = b \cdot k(\alpha; b)$$

のとき、その  $k(\alpha; b)$  がその物理量  $B$  表示の値  $b$  から、位置表示の値  $\alpha$  への変換成分となる。逆変換は  $k^*(\alpha; b)$  である。又、物理量  $B$  を測定したときに現れる測定値はその固有値のみである。

### 4.3 考察

ところで、このような突飛な方法で求めた変換行列や離散的な測定値というものは正しく自然現象を表しているのだろうか。とりうる離散的な測定値が正しいかは直接測定して確かめればよい。間接的には統計力学のカノニカル分布を使って求めた結果が自然現象を正しく表しているかという方法でも調べられるだろう。一方変換行列の正しさを確認するには 1.2 節で述べた性質がこの変換行列で満たされるのかを、実験で求めた確率分布を用いて、確かめなければならない。これは以下のようなことを確認する必要があるということである。今、位置と運動量のある確率分布を実験で求めたとする。それに対して、その絶対値の 2 乗がこの確率分布に等しく、かつ、この固有ベクトル法で求めた位置と運動量の変換行列で結ばれる位置と運動量の確率振幅が存在するのかを確かめなければならない。又、このようにして求めたエネルギー測定状態での位置表示の確率振幅は、この固有ベクトル法の変換行列と等しいのか。さらにはこの変換行列で定義されるエネルギーの確率振幅の絶対値の 2 乗が実際の確率分布に等しくなってくれるか。他の物理量でもこれらのことを確かめなければならない。しかしその肝心の確率分布自体を得る方法がほとんどない (1.10 節参照) のである。だから結局は

固有ベクトル法による変換行列の正しさは後（4.4 節参照）で述べる間接的な方法で確かめられるだけなのである。

このように固有ベクトル法で求めた変換行列の正しさを実験的に確認することは困難なのだが、これが正しいとすると、1.1 節で述べた残された問題、以下に再掲するが、はスピンを除いてすべて答えが出たことになる。

1. 確率分布の時間発展は一意的といっても具体的にはどんな方程式なのか。
2. 位置と運動量の確率分布で他の物理量の確率分布も決まるといえるが、具体的にはどういう関係にあるのか。又、位置と運動量の確率分布には関係はあるのか。
3. 測定時には、その物理量は測定値のみ 0 でない確率分布に移るとして、他の物理量はどのような確率分布に移るか。
4. 測定値は飛び飛びの値のときもあるというが、どんな値が現れるのか。

1 については、変換行列が決まればハミルトニアン行列が決まり、確率振幅の時間発展方程式が決まる。その絶対値の 2 乗が確率分布である。具体的には、すでに変換行列が定まっているので、初期状態（確率分布）から初期確率振幅を求めることができ、それを時間発展方程式で時間発展させ、その絶対値の 2 乗が知りたい確率分布ということになる。2 については、まず、与えられた位置と運動量の確率分布から確率振幅を求める。変換行列が定まっているのだからこれは可能なはずである。そしてこの確率振幅から変換行列を使って他の物理量の確率振幅を求め、その絶対値の 2 乗がその物理量の確率分布となる。こうやって位置と運動量の確率分布から他の物理量の確率分布が定まる。又、位置と運動量の確率分布の間に関係があることは、互いの確率振幅が変換行列で結ばれるというのだから自明であろう。3 については、測定した物理量は、確率振幅が測定値のみ 0 でないものに移るので、その確率振幅をこの変換行列を使って他の物理量の確率振幅に変換することによって、確率分布もわかることになる。4 については、固有値が測定値ということで解決である。

ところで、この固有ベクトル法では

1. その演算子に固有ベクトル、固有値が存在するのか。
2. 固有値がとりうる測定値だというなら、固有値は実数になってくれているのか。
3. 固有ベクトルが変換行列だというなら、それはユニタリーになっているのか。

という数学上の疑問が湧くが、このことは演算子がエルミート行列ならすべて満たされるのである。運動量と角運動量に関しては実際に変換行列は求まっており、それは満たされることはわかっている。有限次元のエルミート行列が以上の性質を持っていることは上級の線形代数の教科書に出ている。そしてここで出てくる、位置、運動量、角運動量、エネルギーの演算子は、すべてエルミート行列——ただ位置や、運動量などは連続変数なので行列という言葉はあまり適当ではないとはいえないのだが——である。エルミート行列と言っても無限次元なので無限次元のまま扱っては証明は難しいとは思う。しかし物理では何でも有限で止めていいのである。尚、これらがエルミート行列であることの証明は付録 D で示す。

ところで、ここで求めた変換行列を使って測定状態を表すと、明らかにおかしな結論に導かれてしまう。そのことを簡単に述べよう。位置を測ると位置の測定状態に飛び移る。 $x, y, z$  の  $x$  成分を測って、値が  $x'$  だっ

たとえと、 $x$  成分に関する確率振幅は  $\psi_x = \delta_{xx'}$  に飛び移る。これを運動量の  $p_x$  成分に変換すると、

$$\begin{aligned}\varphi_{p_x} &= \sum_x \exp(-ip_x x/\hbar) \delta_{xx'} \\ &= \exp(-ip_x x'/\hbar)\end{aligned}$$

になる。ということは運動量の  $p_x$  成分は  $-\infty$  から  $+\infty$  まで等しい確率分布になるということである。そして運動エネルギーの期待値は無限大になる。そんなおかしなことはない。

又、運動量の  $p_x$  成分を測ったとして、値が  $p'_x$  だったとする。状態は  $p'_x$  の測定状態に飛び移り、その運動量表示の確率振幅は  $\delta_{p_x p'_x}$  である。これを位置  $x$  成分の確率振幅に変換すると

$$\begin{aligned}\psi_x &= \sum_{p_x} \exp(ip_x x/\hbar) \delta_{p_x p'_x} \\ &= \exp(ip'_x x/\hbar)\end{aligned}$$

になる。 $x$  成分の確率分布は  $-\infty$  から  $+\infty$  まで等しくなる。これもどう考えてもおかしいわけである。粒子の運動量を地球上で測ったら、その直後にその粒子は、アンドロメダ星雲にある確率も地球にある確率も等しくなるのである。これは粒子が地球から存在しなくなるのと同じである。もちろん、運動量の測定も幅がある。だからそんなに波束は広がらないというのも事実である。しかし精度をどんどん上げていけば、いずれこういう結論に達してしまうのである。

#### 4.4 固有ベクトル法による変換行列はなぜよいか

さて、すでに述べたように、この固有ベクトル法で求められる変換行列が自然を正しく表しているかを直接実験で確かめるのは困難である。一方、変換行列が定まるということは確率振幅の時間発展方程式が定まるということである。この時間発展方程式が自然を正しく表していることを示せば、この変換行列の正しさの有力な根拠になる。それを実験で確かめるということが一番いいに決まっているが、実験上の困難が多々あることであろう。それで、ここでは古典力学との対比で考えたい。古典力学の運動方程式は長年にわたって正しいと思われてきたし、多くの場合近似的には正しいわけである。だから量子力学によって古典力学の運動方程式を導けなければならないはずである。それはこの変換行列を使えば、ある意味導けるのである。それを今から説明しよう。

量子論の測定結果というのは確率的にしか言えないのだが、その測定値の平均値というものが考えられる。例えば位置のある一つの成分  $x_i$  の平均  $\langle x_i \rangle$  なら、 $\langle \quad \rangle$  は平均を意味するとするが、

$$\langle x_i \rangle = \sum_x x_i |\psi(x)|^2$$

であるし、運動量  $p_i$  成分の平均  $\langle p_i \rangle$  なら

$$\langle p_i \rangle = \sum_p p_i |\varphi(p)|^2$$

である。ここで和はこの確率振幅のすべての測定変数で取るとする。他の物理量でも同様である。さて、固有ベクトル法で変換行列が決まるわけだが、変換行列が決まれば確率振幅の時間発展も決まり、平均値の時間発展も決まる。その平均値の時間発展が古典力学の正準方程式に一致するのである。つまり

$$m_i \frac{d\langle x_i \rangle}{dt} = \langle p_i \rangle \quad (4.6)$$

$$\frac{d\langle p_i \rangle}{dt} = - \left\langle \frac{\partial V}{\partial x_i} \right\rangle \quad (4.7)$$

が成り立つ。この式(4.6)、(4.7)の証明は第5章に回す。

(4.6)をもう1回時間で微分すると

$$m_i \frac{d^2 \langle x_i \rangle}{dt^2} = \frac{d\langle p_i \rangle}{dt}$$

となり、これと(4.7)より

$$m_i \frac{d^2 \langle x_i \rangle}{dt^2} = - \left\langle \frac{\partial V}{\partial x_i} \right\rangle \quad (4.8)$$

も成り立つ。

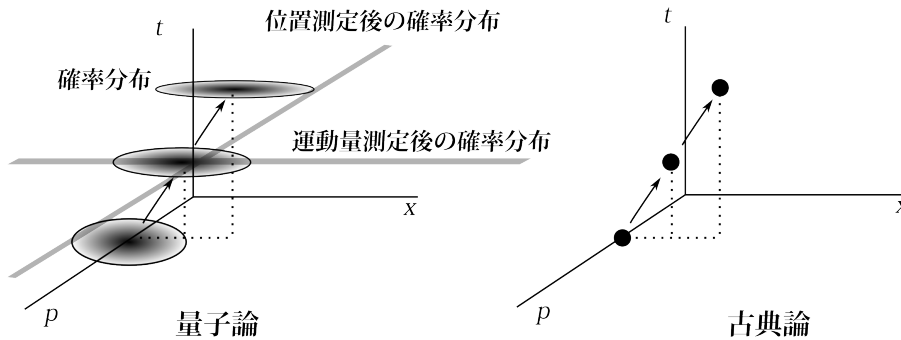


図 4.1 1次元自由粒子での量子論での位置  $x$  と運動量  $p$  の確率分布の時間発展 (左図) と古典論での粒子の時間発展 (右図)。縦軸が時間  $t$ 。

例えば1次元の自由粒子で考えてみよう。初期確率分布として位置の平均値は0、運動量の平均値は正とする。確率分布は図4.1の左図のような時間発展をされると考えられる。運動量の平均は変化しない。位置の平均は一定の速度で増加する。確率分布の広がり自体はどうなるかわからないので想像で描いた。位置を測定すると図4.1のように縦に無限に伸びた分布になり、運動量を測定すると横に無限に伸びた分布になる。これは前節(4.3節)でも述べたようにおかしいのである。

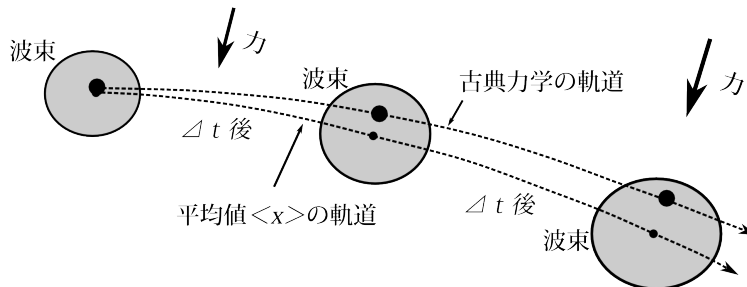


図 4.2 位置の平均値  $\langle x \rangle$  の運動は決して古典力学に従うわけではない。しかし波束内での力の場が一定とみなしていいなら、平均値の運動は古典力学に従う。

さて、位置の確率分布のことを波束と呼ぶことにしよう。又、力の場を

$$F_i(x) \equiv -\frac{\partial V(x)}{\partial x_i}$$

と書くことにしよう。(4.8) が主張していることというのは、位置の平均値の加速度の質量倍  $m_i \frac{d^2 \langle x_i \rangle}{dt^2}$  が、力の場のこの波束中での平均、つまり

$$\sum_x F_i(x) |\psi(x)|^2$$

に等しいということである。決して位置の平均値の場所  $\langle x \rangle$  での力  $F_i(\langle x \rangle)$  と等しいわけではない。つまり、位置の平均値  $\langle x \rangle$  は決して古典力学の方程式に従って動くわけではないのである (図 4.2)。しかし、その波束の広がり十分小さくて、力の場がその波束内で一定とみなしていいなら、

$$\begin{aligned} \sum_x F_i(x) |\psi(x)|^2 &\simeq F_i(\langle x \rangle) \sum_x |\psi(x)|^2 \\ &= F_i(\langle x \rangle) \end{aligned}$$

となり、位置の平均値の加速度の質量倍はその平均値での場所  $\langle x \rangle$  での力の場と一致するわけである。この場合位置の平均値  $\langle x \rangle$  は古典力学の方程式に従って動く。以上まとめると

波束が十分小さくて、力の場  $F_i(x)$  がその波束内で一定であるとみなしてよいなら、位置の平均値  $\langle x \rangle$  の運動は古典力学の運動方程式

$$m_i \frac{d^2 \langle x_i \rangle}{dt^2} = F_i(\langle x \rangle)$$

に従う。

又、波束が十分小さいなら、位置の平均値  $\langle x \rangle$  と波束自体もおおむね一致しているので、波束自体の運動も古典力学の方程式に従うと言える。

## 4.5 古典力学が再現されているか

このように波束の運動は古典力学の式に概ね従うのだが、これでこの固有ベクトル法の正しさがわかったとせず、少し立ち止まって考えよう。(4.6)、(4.7)の意味はある状態  $\lambda$  というのを何度もセットして運動量を測る。又、同じようにその状態  $\lambda$  を何度もセットして位置を測る。そして運動量と位置の平均を計算する。次に微小時間後に、状態  $\lambda$  は時間発展方程式に従って少し変化しているわけだが、その変化した状態で、同じように運動量と位置を測る。そして平均値を得る。そしてその平均値の時間微分を計算する。その結果 (4.6)、(4.7) の等式が成り立つというのである。さらに、もう一つ微小時間後に測定すれば平均値の時間による 2 階微分が得られる。その結果 (4.8) が成り立つというわけである。だから、こう考えると古典力学を再現しているとは言い難いのである。

しかし私は、確率分布自体が測定値そのものであると感じている。これは世間では明確には言われていないが、暗にそういう意味として使っている気がするのである。測定をすると幅があり、誤差があるが、その範囲に確率分布は収まるわけである。その範囲がその測定値の範囲でありかつ確率分布の範囲なのである。量子力学の出現以前に電子の電荷と質量の比を求めることができたのだが、それを求めるときに使った電子の軌道というのは確率分布の軌道だったのである。しかしこれは測定とは何を意味するかをはっきりさせないと意味が

ないことではある。又、確率分布は他の粒子に影響を及ぼしている。1粒子の系でのポテンシャルというのは他の物体の確率分布からポテンシャルを近似的に導き出しているのである。だから

確率分布というものは単なる測定時における確率というだけでなく、確率分布自体が外部に作用を及ぼしているものであり、それ自体が測定値なのである

と言った方がいいと思っている。そう考えれば、上に述べたように波束 (位置の確率分布) はおおむね古典力学の方程式に動くのであるから、測定値が古典力学の方程式に従って動くということになり、古典力学を再現していると言える。又、古典力学が今まで概ね正しい結果を出し続けてきたことにも納得がいくであろう。



## 第 5 章

# 平均値と古典論の運動方程式の形式的な一致

この章では、固有ベクトル法で求めた変換行列を使えば、量子力学の平均値の時間発展方程式が形式的には古典論と一致することを数学的に示す。形式的に一致しているからと言って、波束が古典力学の方程式に従って動くとは言えないが、一般には磁場、電場の変化が空間上の変化が波束に比べて小さいなら、平均値は古典力学の方程式に従う。まず平均値の時間発展方程式の一般式を示し、それを適用して順次、特殊から一般へと進んでいく。まずは第 4 章の宿題であった  $m_i \frac{d\langle x_i \rangle}{dt} = \langle p_i \rangle$ ,  $\frac{d\langle p_i \rangle}{dt} = -\left\langle \frac{\partial V}{\partial x_i} \right\rangle$  が成り立つことを証明する。次に磁場のある場合、つまりベクトルポテンシャルの存在する系でも、古典論と形式上一致することを示す。最後に任意の物理量でも平均値の運動方程式は古典論と形式上一致することを示す。これからは演算子記号  $\hat{p}$  の上に付けたものを省いて単に  $p$  と書くことにするが、混乱することはないと思う。

### 5.1 平均値の運動方程式の一般形

第 4 章で各物理量ごとに、位置の確率振幅に作用させる演算子を定義した。その演算子の位置以外の確率振幅に作用させる場合での表示というものを考えたい\*1。線形代数学でよく知られているように、線形演算子  $B$  の他の表示への変換は、 $U$  を他の表示への変換行列として、 $UBU^{-1}$  であるのだが、そのことについて少し注意したい。まず、位置の確率振幅に演算子  $B$  をほどこした  $B\psi$  というのは、絶対値の 2 乗が 1 にはならないので、確率振幅でも何でもなく、物理的実体のないものである。通常、線形代数学の線形演算子は、あるベクトル空間から、あるベクトル空間への写像であり、写像するベクトル空間という実体がある。そこが線形代数学の線形演算子とは違うところである。例えばあるベクトル  $\mathbf{x}$  に角度  $\theta$  だけ回転させる演算子  $T(\theta)$  を作用させた  $T(\theta)\mathbf{x}$  というのは実体がある。だから基底の変更による演算子の行列表示の変更は、ベクトルがどの基底であろうが同じ回転をしなければいけないということから決まるのである。しかし  $B\psi$  は実体がない。例えば位置表示において、運動量演算子を作用させた  $\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_i} \psi(x)$  というのが、もしある量子力学的状態（確率分布の組のこと）を表していると言うなら、これを、例えばエネルギー表示の確率振幅で表すことはできる。しかし  $\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_i} \psi(x)$  はいかなる量子力学的状態も表していないのであるから他の表示も何もないのである。それでは、この演算子  $B$  は表示の変更というものを考えることができないのかということ、そんなことはない。いろいろ難しいことを考えず、単に写像された  $B\psi$  を物理的意味のない単なる数ベクトルと考えれば、基底の変換による演算子の表示の変換が考えられる。そして演算子の表示の変換は線形代数学のように  $UBU^{-1}$  となる。量子力学での確率振幅の変換行列は必ずユニタリーなので  $UBU^\dagger$  となる。

\*1 既に第 4 章でエネルギー演算子の、位置表示だけでなく、エネルギー表示などについても述べたが、ここで改めて考えようということである。

さて、よく知られているように

$$\psi^\dagger B \psi$$

はユニタリ変換

$$\psi' = U \psi \tag{5.1}$$

で不変量になる。これは線形代数学でよくする添字省略形である。この証明は簡単で、確率振幅が (5.1) と変換されるなら、演算子  $B$  は

$$B' = U B U^\dagger$$

と変換されるので、

$$\begin{aligned} \psi'^\dagger B' \psi' &= (U \psi)^\dagger (U B U^\dagger) (U \psi) \\ &= \psi^\dagger U^\dagger U B U^\dagger U \psi \\ &= \psi^\dagger B \psi \end{aligned}$$

となるというわけである。

4.2 節の命題 4.2 で述べたように、演算子  $B$  の  $B$  表示は対角成分が固有値  $b$ ——これは取りうる測定値でもある——となる対角行列、つまり

$$B_{b'b} = b' \delta_{b'b}$$

となる。だから、この  $\psi^\dagger B \psi$  を物理量  $B$  の表示で計算すると

$$\psi^\dagger B \psi = \sum_{b',b} \psi_{b'}^* B_{b'b} \psi_b = \sum_b b |\psi_b|^2$$

となる。これは物理量  $B$  の平均値である。ここで注意だが、 $\psi^\dagger B \psi$  が平均値となるのは  $B$  がエルミート演算子の場合である。エルミートでないなら——必ずしもとはいえないが—— $B$  は対角成分が実数固有値の対角行列にならないだろうから平均値にならない。例えば、 $yp_y$  などは、エルミートではない。というよりも  $yp_y$  などは測定することができないはずである。以上のことをまとめると

**命題 5.1**  $B$  を物理量  $B$  の演算子として、エルミート演算子とすると、 $\psi^\dagger B \psi$  は、どんな表示でも、状態が確率振幅  $\psi$  のときの物理量  $B$  の平均値となる。つまり

$$\psi^\dagger B \psi = \langle B \rangle$$

となる。

さて、これを使って平均値の時間発展方程式の一般形を導こう。

$$\frac{d\langle B \rangle}{dt} = \frac{d}{dt} (\psi^\dagger B \psi) = \frac{d\psi^\dagger}{dt} B \psi + \psi B \frac{d\psi}{dt} + \psi^\dagger \frac{\partial B}{\partial t} \psi \tag{5.2}$$

であるが\*2一方  $\psi$  の時間発展は

$$i\hbar \frac{d\psi}{dt} = H \psi$$

\*2 物理量  $B$  が時間を含んでいる場合を扱うことなどないのだが、時間を含んでいたからと言ってたいしてややこしくなることもないので、時間を含むとした。

で決まる。ここで  $H$  はハミルトニアン行列。これの転置共役をとると

$$-i\hbar \frac{d\psi^\dagger}{dt} = \psi^\dagger H$$

である。ここで  $H$  がエルミートであることを使った。これを (5.2) に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{d\langle B \rangle}{dt} &= -\frac{1}{i\hbar} (\psi^\dagger HB\psi - \psi^\dagger BH\psi) + \psi^\dagger \frac{\partial B}{\partial t} \psi \\ &= \psi^\dagger \left( \frac{1}{i\hbar} [B, H] + \frac{\partial B}{\partial t} \right) \psi \end{aligned}$$

となる。ここで  $[B, H] = BH - HB$  のことである。これは交換子と呼ばれるもので、 $A, B$  を演算子として

$$[A, B] \equiv AB - BA$$

と定義される。さて、この結果は今から頻繁に使うので命題の形で書いておこう。

**命題 5.2** 確率振幅  $\psi$  での物理量  $B$  の平均値の時間発展は、

$$\frac{d\langle B \rangle}{dt} = \psi^\dagger \left( \frac{1}{i\hbar} [B, H] + \frac{\partial B}{\partial t} \right) \psi$$

が成り立つ。

尚、 $\frac{1}{i\hbar} [B, H]$  と  $\frac{\partial B}{\partial t}$  はエルミートなので

$$\frac{d\langle B \rangle}{dt} = \left\langle \frac{1}{i\hbar} [B, H] \right\rangle + \left\langle \frac{\partial B}{\partial t} \right\rangle$$

でもある。

### 交換子の性質

交換子のいくつかの性質を述べよう。 $A, B, C$  を演算子として、定義から明らかに

$$[A + B, C] = [A, C] + [B, C] \quad [A, B + C] = [A, B] + [A, C]$$

が成り立つ事がわかる。そして

$$[A, B^2] = [A, B]B + B[A, B] \tag{5.3}$$

が成り立つ。この性質は今後度々使う。また、

$$[x_i, p_j] = i\hbar \delta_{ij} \tag{5.4}$$

である。これは位置表示で演算子  $x_i = x_i$ ,  $p_i = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_i}$  であることを使えば明らかであろう。尚、この交換関係は他の表示でも成り立つ。

## 5.2 平均値の運動方程式が正準方程式を満たすこと——磁場がない場合

これで準備ができたので、 $m_i \frac{d\langle x_i \rangle}{dt} = \langle p_i \rangle$ ,  $\frac{d\langle p_i \rangle}{dt} = -\left\langle \frac{\partial V}{\partial x_i} \right\rangle$  が成り立つことを証明しよう。これ以後、演算子は基本的に位置表示のものを使うとする。系の古典力学でのハミルトニアン  $H$  は

$$H = \sum_i \frac{p_i^2}{2m_i} + V(x)$$

だとして、ベクトルポテンシャルを含んでいる場合は 5.3 節で証明する。第 4 章の命題 4.1 で述べたように、量子論での位置表示のハミルトニアン  $H$  は単にこれを  $x_i = x_i$ ,  $p_i = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_i}$  で置き換えたものになる。だからこれ自身が量子論でのハミルトニアン行列になる。

#### 位置の時間発展

まず

$$\frac{d\langle x_i \rangle}{dt} = \frac{\langle p_i \rangle}{m_i} \quad (5.5)$$

から証明する。これは命題 5.2 より

$$\frac{d\langle x_i \rangle}{dt} = \psi^\dagger \left( \frac{1}{i\hbar} [x_i, H] \right) \psi$$

なので

$$[x_i, H] = i\hbar \frac{p_i}{m_i} \quad (5.6)$$

が成り立つことを示せばよい。実際

$$[x_i, H] = [x_i, p_i^2/2m_i]$$

であり、(5.3),(5.4) より

$$[x_i, p_i^2] = [x_i, p_i]p_i + p_i[x_i, p_i] = 2i\hbar p_i$$

である。よって (5.6) が成り立つ。よって (5.5) が成り立つ。

#### 運動量の時間発展

又、

$$\frac{d\langle p_i \rangle}{dt} = - \left\langle \frac{\partial V}{\partial x_i} \right\rangle \quad (5.7)$$

を証明するには、命題 5.2 より、

$$\frac{d\langle p_i \rangle}{dt} = \psi^\dagger \left( \frac{1}{i\hbar} [p_i, H] \right) \psi$$

なので、

$$[p_i, H] = -i\hbar \frac{\partial V}{\partial x_i}$$

であることを証明できれば良い。これは

$$[p_i, H] = [p_i, V(x)] = -i\hbar \frac{\partial V}{\partial x_i}$$

となるので成り立つ。よって (5.7) は成り立つ。

今は固有ベクトル法で決まる変換行列の正しさを見るために古典論と対比しているのだが、この証明では変換行列の成分の具体的な値など使っておらず、演算子の交換関係しか使っていないように見える。しかし、この証明には命題 5.2, 命題 5.1 が必要であり、命題 5.1 の証明では演算子  $B$  が  $B$  表示で対角行列になることを使っている。対角行列になるというのは、固有ベクトルが変換行列になるということを使っているのである。しかしながら、具体的な変換行列の成分については何も使っていない。その情報は交換子  $[x, H]$  や  $[p, H]$  の中に含まれているはずである。

### 5.3 磁場のある場合も正準方程式を満たすこと

次に、磁場のある場合も平均値の運動方程式は、形式的には正準方程式を満たすことを示す。これは今までの場合と何が違うかと言うと、古典力学におけるハミルトニアンが

$$H = \sum_{i=1}^{i=3} \frac{1}{2m} \left[ p_i - \frac{q}{c} A_i(x) \right]^2 + q\phi(x)$$

という形だということである。量子力学でのハミルトニアンはここでの  $p_i$  を  $\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_i}$  に置き換えたものになる。これは1粒子の場合だが、2粒子以上でも粒子数に応じて、同じ項が加わるだけなので1粒子の場合を考える。これはCGSガウス単位系であり、 $q$ は電荷、 $c$ は光速、 $A$ はベクトルポテンシャル、 $\phi$ はスカラーポテンシャルである。 $A_i(x)$ と $\phi(x)$ は時間を陽に含んでおらず位置のみの関数で\*3、今後は単に $A_i, \phi$ と書くので位置のみの関数だと覚えておいてもらいたい。このハミルトニアンを使って量子論の平均値の運動方程式と古典論の運動方程式を対比していこう。

まず、簡略化のため

$$p_i - \frac{q}{c} A_i = u_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

と置くことにする。これを使うとハミルトニアンは

$$H = \sum_{i=1}^{i=3} \frac{u_i^2}{2m} + q\phi(x)$$

とすっきりする。後で見るように、 $u_i$ は通常の運動量  $m \cdot dx_i/dt$  である。さて、今から古典論と量子論での、位置と運動量と加速度の時間発展方程式を対比しながら導出していくのだが、そのさい、古典論の式では

$$\frac{\partial u_j}{\partial p_i} = \delta_{ij} \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = -\frac{q}{c} \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \quad (5.8)$$

を使う。量子論では

$$[x_i, u_j] = i\hbar \delta_{ij} \quad (5.9)$$

$$[p_i, u_j] = -\frac{q}{c} [p_i, A_j] = i\hbar \frac{q}{c} \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \quad (5.10)$$

$$[A_i, u_j] = [A_i, p_j] = i\hbar \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \quad (5.11)$$

を使う。また  $B$  を任意の演算子として

$$[B, u_i^2] = [B, u_i]u_i + u_i[B, u_i] \quad (5.12)$$

も使う。これは(5.3)で述べたものと同じである。これらが成り立つのはすぐわかる。

\*3  $A$  や  $\phi$  が時間を陽に含んでいると、ハミルトニアンまで時間を陽に含むことになってしまう。そうすると命題5.2なども成り立たなくなってしまう。この論文では一貫してハミルトニアンは時間を含まないものとして扱う。

### 位置古典論

まず位置  $x_i$  の時間発展方程式は、古典論では正準方程式

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

より

$$m \frac{dx_i}{dt} = u_i \quad \left( u_i = p_i - \frac{q}{c} A_i \right) \quad (5.13)$$

である。尚、この式から  $p_i$  は

$$p_i = m \frac{dx_i}{dt} + \frac{q}{c} A_i$$

となり通常の運動量と異なることに注意。ベクトルポテンシャルが空間で変化する場合など一体どうやってこの運動量と言われるものを測るのだろうかとは思う。

### 位置量子論

一方量子論だが、命題 5.2 より

$$\frac{d\langle x_i \rangle}{dt} = \psi^\dagger \frac{[x_i, H]}{i\hbar} \psi$$

である。そして

$$[x_i, H] = \frac{1}{2m} [x_i, u_i^2]$$

であり、(5.12)、(5.9) より

$$[x_i, u_i^2] = [x_i, u_i]u_i + u_i[x_i, u_i] = 2i\hbar u_i$$

なので

$$m \frac{d\langle x_i \rangle}{dt} = \langle u_i \rangle \quad \left( u_i = p_i - \frac{q}{c} A_i \right) \quad (5.14)$$

である。これは古典論での (5.13) と同じ項で構成されている。

### 運動量古典論

運動量の時間発展方程式は、古典論では正準方程式

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}$$

より、(5.8) を使って

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{q}{mc} \sum_{j=1}^3 u_j \cdot \frac{\partial A_j}{\partial x_i} - q \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \quad \left( u_i = p_i - \frac{q}{c} A_i \right) \quad (5.15)$$

となる。

## 運動量量子論

量子論を計算する。命題 5.2 より

$$\frac{d\langle p_i \rangle}{dt} = \psi^\dagger \frac{[p_i, H]}{i\hbar} \psi$$

である。そして

$$[p_i, H] = \sum_{j=1}^3 \frac{1}{2m} [p_i, u_j^2] + [p_i, q\phi]$$

であり、(5.12)、(5.10) より

$$\begin{aligned} [p_i, u_j^2] &= [p_i, u_j] u_j + u_j [p_i, u_j] \\ &= i\hbar \frac{q}{c} \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \cdot u_j + u_j \cdot i\hbar \frac{q}{c} \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \end{aligned}$$

となる。また

$$[p_i, q\phi] = -i\hbar q \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$$

である。だから

$$\frac{d\langle p_i \rangle}{dt} = \frac{q}{2mc} \sum_{j=1}^3 \left\langle \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \cdot u_j + u_j \cdot \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \right\rangle - q \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right\rangle \quad \left( u_i = p_i - \frac{q}{c} A_i \right) \quad (5.16)$$

である。これも、演算子の順序を気にしなければ古典論の (5.15) と同じ項で構成されている。ただ

$$\frac{\partial A_j}{\partial x_i} \cdot u_j \neq u_j \cdot \frac{\partial A_j}{\partial x_i}$$

であることに注意\*4。

## 加速度古典論

さて次に加速度だが、古典論では (5.13) を時間微分して

$$m \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{dp_i}{dt} - \frac{q}{c} \frac{dA_i}{dt}$$

である。ベクトルポテンシャルの時間微分は

$$\begin{aligned} \frac{dA_i}{dt} &= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt} \\ &= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \frac{u_j}{m} \end{aligned} \quad (5.17)$$

である。ここで (5.13) を使った。又、運動量の時間微分は (5.15) である。これらを代入すると

$$m \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{q}{mc} \sum_{j=1}^3 \left( \frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right) u_j - q \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$$

\*4  $\frac{\partial A_j}{\partial x_i} \cdot u_j$  はエルミートでないので、この平均  $\left\langle \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \cdot u_j \right\rangle$  というのは考えることができない。それで、 $\left\langle \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \cdot u_j + u_j \cdot \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \right\rangle$  とした。

となる。ここで

$$\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} = F_{ij} \quad -\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = E_i \quad (5.18)$$

と置き、(5.13) を使うと

$$m \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{q}{c} \sum_{j=1}^3 F_{ij} \frac{dx_j}{dt} + q E_i \quad (5.19)$$

となる。尚、 $F_{ij}$  は磁場テンソルと言われるもので、磁場  $B_i$  とは

$$F_{12} = B_3 \quad F_{23} = B_1 \quad F_{31} = B_2$$

という関係にある。 $E_i$  は電場である。そしてこの式はローレンツ力の式になっている。

### 加速度量子論

一方量子論では (5.14) を時間微分して

$$m \frac{d^2 \langle x_i \rangle}{dt^2} = \frac{d \langle p_i \rangle}{dt} - \frac{q}{c} \frac{d \langle A_i \rangle}{dt}$$

である。ベクトルポテンシャルの時間微分だが、命題 5.2 より

$$\frac{d \langle A_i \rangle}{dt} = \psi^\dagger \frac{[A_i, H]}{i\hbar} \psi$$

である。そして

$$[A_i, H] = \frac{1}{2m} \sum_{j=1}^3 [A_i, u_j^2]$$

であり、(5.12)、(5.11) より

$$\begin{aligned} [A_i, u_j^2] &= [A_i, u_j] \cdot u_j + u_j \cdot [A_i, u_j] \\ &= i\hbar \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \cdot u_j + i\hbar u_j \cdot \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \end{aligned}$$

である。だから

$$\frac{d \langle A_i \rangle}{dt} = \frac{1}{2m} \sum_{j=1}^3 \left\langle \left( \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \cdot u_j + u_j \cdot \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right) \right\rangle$$

これは順序以外は古典論の (5.17) と同じ項で構成されている。又、運動量の時間微分は (5.16) であり、これは古典論と一致していることはすでに見た。だから加速度も古典論と同じ項で構成されていることになる。長いがそれを書き下すと、

$$m \frac{d^2 \langle x_i \rangle}{dt^2} = \frac{q}{2mc} \sum_{j=1}^3 \left\langle \left( \left( \frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right) \cdot u_j + u_j \cdot \left( \frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right) \right) \right\rangle - q \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right\rangle$$

となる。(5.18) を使うと、



$$m \frac{d^2 \langle x_i \rangle}{dt^2} = \frac{q}{2mc} \sum_{j=1}^3 \langle F_{ij} \cdot u_j + u_j \cdot F_{ij} \rangle + q \langle E_i \rangle$$

となる。構成されている項は古典論と同じだが、もちろん古典論と量子論では物理的内容が異なる。第4章で述べたように、平均値  $\langle x \rangle$  の運動は古典論の方程式には従うわけではない。

#### 波束内で電場、磁場の変化が小さい場合

これだけでは身もふたもないので、平均値の運動が古典論の方程式に従うような状況を考えよう。まず、

$$\langle F_{ij} \cdot u_j + u_j \cdot F_{ij} \rangle = \sum_x \psi^\dagger(x) \left( F_{ij} \cdot u_j + F_{ij} \cdot u_j - i\hbar \frac{\partial F_{ij}}{\partial x_j} \right) \psi(x)$$

と変形しておこう。今磁場  $F_{ij}$  と電場  $E_i$  が波束内での変化が十分小さく、

- 【1】 波束内で、常に波束の平均値  $\langle x \rangle$  での値と考えていい、つまり波束内では  $F_{ij}(x) \simeq F_{ij}(\langle x \rangle)$ ,  $E(x) \simeq E(\langle x \rangle)$  とみなせる。
- 【2】 波束内では磁場の空間微分  $\frac{\partial F_{ij}}{\partial x_j} \simeq 0$  とみなせる

としていいとしよう。ここで、【1】が満たされるからといって必ずしも【2】が満たされるわけではないことに注意しよう。例えば空間微分が大きくても波束が非常に小さければ、【1】は満たされるが、【2】は満たされない。さて、この条件が満たされるなら

$$\begin{aligned} \sum_x \psi^\dagger(x) \left( 2F_{ij}(x) \cdot u_j - i\hbar \frac{\partial F_{ij}}{\partial x_j} \right) \psi(x) &\simeq 2F_{ij}(\langle x \rangle) \sum_x \psi^\dagger(x) u_j \psi(x) \\ &= 2F_{ij}(\langle x \rangle) \cdot \langle u_j \rangle \end{aligned}$$

と近似できるし、

$$\langle E_i \rangle = \sum_x \psi_x^* E_i(x) \psi_x \simeq E_i(\langle x \rangle)$$

と近似できる。だから

$$m \frac{d^2 \langle x_i \rangle}{dt^2} \simeq \frac{q}{mc} \sum_{j=1}^3 F_{ij}(\langle x \rangle) \cdot \langle u_j \rangle + qE_i(\langle x \rangle)$$

となる。又は (5.14) を使って  $\langle u_j \rangle$  を消去すると

$$m \frac{d^2 \langle x_i \rangle}{dt^2} \simeq \frac{q}{c} \sum_{j=1}^3 F_{ij}(\langle x \rangle) \cdot \frac{d \langle x_j \rangle}{dt} + qE_i(\langle x \rangle)$$

である。古典論では、(5.19) を再掲すると、

$$m \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{q}{c} \sum_{j=1}^3 F_{ij}(x) \frac{dx_j}{dt} + qE_i(x)$$

であった。量子論での  $\langle x \rangle$  と古典論での  $x$  は微分方程式の未知変数として全く同じ役割をしている。だからこの場合位置の平均とその時間微分を初期条件として与えられれば、その運動は古典論の時間発展方程式に従うということである。つまり

磁場と電場が波束内で変化が十分小さく、上記条件【1】【2】が満たされるなら、位置の平均値  $\langle x \rangle$  は古典論の運動方程式に従う。

尚、この条件が満たされている場合は、波束全体の運動もおおむね古典論の方程式に従うと考えられる。この条件が完全に満たされるのは、空間的にも時間的にも一様な磁場、電場の場合である。この場合は近似でなく完全に位置の平均値  $\langle x \rangle$  の運動は古典論の方程式に従う。

## 5.4 任意の物理量の平均値の時間発展式が古典論と一致すること

いままで古典論と量子論で位置、運動量、加速度などの時間発展方程式での項が形式的に等しいことを見てきた。実はこのことはあらゆる物理量で——演算子にしたときにエルミートでなければならないが——成り立つことなのである。それを示そう。

### ポアソンの括弧

古典力学では位置  $x$ 、運動量  $p$ 、時間  $t$  の関数である物理量  $B(x, p, t)$  の時間発展方程式は

$$\frac{dB}{dt} = \sum_i \left( \frac{\partial B}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial B}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial B}{\partial t} \quad (5.20)$$

と表される。この導出は簡単でまず、 $B$  を時間微分すると

$$\frac{dB}{dt} = \sum_i \left( \frac{\partial B}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial B}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \right) + \frac{\partial B}{\partial t}$$

となるが、正準方程より

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}$$

なのでこれをを代入すれば (5.20) が得られる。正準方程式は  $B = x, B = p$  とした場合であるので、この時間発展方程式に含まれる。(5.20) の右辺の和の項はポアソンの括弧と呼ばれるもので  $\{B, H\}$  と略記される。尚、一般に任意の物理量  $A, B$  のポアソンの括弧  $\{A, B\}$  の定義は

$$\{A, B\} \equiv \sum_i \left( \frac{\partial A}{\partial x_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial x_i} \right)$$

である。

一方量子論での時間発展方程式は

$$\frac{d\langle B \rangle}{dt} = \psi^\dagger \left( \frac{1}{i\hbar} [B, H] + \frac{\partial B}{\partial t} \right) \psi$$

であった (命題 5.2)。この右辺の  $\frac{1}{i\hbar} [B, H] + \frac{\partial B}{\partial t}$  が (5.20) の右辺と同じ項で構成されることを証明しよう。 $\frac{\partial B}{\partial t}$  は同じなので  $\frac{1}{i\hbar} [B, H]$  が  $\{B, H\}$  と同じ項で構成されていることを証明できればよい。証明に際しては  $B$  と  $H$  は運動量  $p$  に関しては多項式であるものに限定する。実際問題として、 $H$  では位置に関しては  $1/r$  のようなポテンシャルもあるが、 $p$  の多項式となっていない  $H$  は見たことがない。それに基本的にどんな関数でも多項式で近似できるので  $p$  に関しては多項式と制限しても特に問題はなかろう。例えばハミルトニアンが

$$H = \sum_i \frac{p_i^2}{2m_i} + V(x) \quad H = \sum_{i=1}^{i=3} \frac{1}{2m} \left[ p_i - \frac{q}{c} A_i(x) \right]^2 + q\phi(x)$$

のときは  $p$  の多項式になっているし、角運動量の  $z$  成分も

$$xp_y - yp_x$$

と  $p$  の多項式になっている。角運動量の 2 乗も  $p$  の多項式である。そういうわけで、

補題 A 物理量  $C$  と  $D$  が  $p$  に関して多項式の時、 $\frac{1}{i\hbar}[C, D]$  は  $\{C, D\}$  と同じ項で構成されている

ことを証明すればよいことになる。

さて、 $p$  に関して多項式ということは、それは、 $p$  か位置  $x$  の関数<sup>\*5</sup>による積の和で書けるということである。つまり  $C$  が  $p$  の多項式なら、 $C$  は

$$C = \sum_i C_i$$

というように、個々の  $C_i$

$$C_i = c_1 c_2 \cdots c_m$$

と言う積の形で書け、個々の  $c_i$  は  $p$  か位置  $x$  の関数であるような  $C_i$  の和の形で書けるということである。

さて、交換子とポアソンの括弧では、それぞれ

$$\left[ \sum_i C_i, \sum_j D_j \right] = \sum_{i,j} [C_i, D_j] \quad \left\{ \sum_i C_i, \sum_j D_j \right\} = \sum_{i,j} \{C_i, D_j\}$$

が成り立つ。だから個々に  $\frac{1}{i\hbar}[C_i, D_j]$  が  $\{D_i, D_j\}$  と同じ項で構成されていることが証明できればよい。つまり、補題 A を証明することは

補題 B  $C = c_1 c_2 \cdots c_m$ 、 $D = d_1 d_2 \cdots d_n$  のとき  $\frac{1}{i\hbar}[C, D]$  は  $\{C, D\}$  と同じ項で構成されている。ここで  $c$  と  $d$  は  $p$  か位置  $x$  の関数である。

を証明することに帰着したわけである。

### 古典論の項

今例えば  $C = c_1 c_2 c_3$  とすると、 $\frac{\partial C}{\partial x_k}$  というものは

$$\frac{\partial C}{\partial x_k} = \frac{\partial c_1}{\partial x_k} c_2 c_3 + c_1 \frac{\partial c_2}{\partial x_k} c_3 + c_1 c_2 \frac{\partial c_3}{\partial x_k}$$

というように個々の項の微分の和になる。同様に  $D = d_1 d_2 d_3$  とすると

$$\frac{\partial D}{\partial p_k} = \frac{\partial d_1}{\partial p_k} d_2 d_3 + d_1 \frac{\partial d_2}{\partial p_k} d_3 + d_1 d_2 \frac{\partial d_3}{\partial p_k}$$

となる。だから

$$\frac{\partial C}{\partial x_k} \frac{\partial D}{\partial p_k} = \sum_{i,j} \frac{\partial c_i}{\partial x_k} \frac{\partial d_j}{\partial p_k} \times (c_i, d_j \text{ を除いた項の積})$$

となる。こう考えるとポアソンの括弧は

<sup>\*5</sup>  $x$  の関数と言っても、定数や時間の関数の場合もあるので、広い意味での  $x$  の関数という意味である。正確には  $p$  を含まないという意味であるが、そうすると分かりづらいし、時間は今後役割を担わないので、位置の関数とした。今後もそういう意味で使う。

補題 C  $C = c_1 c_2 \cdots c_m$ ,  $D = d_1 d_2 \cdots d_n$  のとき

$$\begin{aligned} \sum_k \left( \frac{\partial C}{\partial x_k} \frac{\partial D}{\partial p_k} - \frac{\partial C}{\partial p_k} \frac{\partial D}{\partial x_k} \right) &= \sum_k \sum_{i,j} \left[ \left( \frac{\partial c_i}{\partial x_k} \frac{\partial d_j}{\partial p_k} - \frac{\partial c_i}{\partial p_k} \frac{\partial d_j}{\partial x_k} \right) \times (c_i, d_j \text{を除いた項の積}) \right] \\ &= \sum_{i,j} \left( \{c_i, d_j\} \times (c_i, d_j \text{を除いた項の積}) \right) \end{aligned}$$

となる

ことがわらう。

### 量子論の項

次に、量子論に移ろう。今からやる作業は簡単なことなのだが、文字で説明するのは案外難しいので、自分でやってみることを勧める。 $C = c_1 c_2 c_3$ ,  $D = d_1 d_2 d_3$  という簡単な例で考えよう。 $c_3$  を  $d_1 d_2 d_3$  に作用させ、一般の公式  $xy = [x, y] + yx$  を使って順次右へ持っていくと

$$\begin{aligned} c_3 d_1 d_2 d_3 &= ([c_3, d_1] + d_1 c_3) d_2 d_3 \\ &= [c_3, d_1] d_2 d_3 + d_1 ([c_3, d_2] + d_2 c_3) d_3 \\ &= [c_3, d_1] d_2 d_3 + d_1 [c_3, d_2] d_3 + d_1 d_2 [c_3, d_3] + d_1 d_2 d_3 c_3 \end{aligned}$$

となる。ここで演算子を変数とする関数  $f(x)$  を

$$f(x) \equiv [x, d_1] d_2 d_3 + d_1 [x, d_2] d_3 + d_1 d_2 [x, d_3]$$

と定義すると

$$c_3 d_1 d_2 d_3 = f(c_3) + d_1 d_2 d_3 c_3$$

と書ける。 $f(x)$  というのは  $x$  と  $d_1, d_2, d_3$  の全てとの交換子を含み、それに掛かっている項は、その交換子に含まれていない項の和で構成されていることに注意しよう。さて、これに  $c_2$  を作用させ、 $d_1 d_2 d_3$  とだけ順次交換していくと、全く今と同様に

$$\begin{aligned} c_2 c_3 d_1 d_2 d_3 &= c_2 f(c_3) + (c_2 d_1 d_2 d_3) c_3 \\ &= c_2 f(c_3) + f(c_2) c_3 + (d_1 d_2 d_3 c_2) c_3 \end{aligned}$$

となる。さらにこれに  $c_1$  を作用させて  $d_1 d_2 d_3$  とだけ交換していくと

$$\begin{aligned} c_1 c_2 c_3 d_1 d_2 d_3 &= c_1 c_2 f(c_3) + c_1 f(c_2) c_3 + (c_1 d_1 d_2 d_3) c_2 c_3 \\ &= c_1 c_2 f(c_3) + c_1 f(c_2) c_3 + f(c_1) c_2 c_3 + (d_1 d_2 d_3 c_1) c_2 c_3 \end{aligned}$$

となる。だから

$$[c_1 c_2 c_3, d_1 d_2 d_3] = c_1 c_2 f(c_3) + c_1 f(c_2) c_3 + f(c_1) c_2 c_3 \quad (5.21)$$

となる。今の作業というのはまず  $c_3$  を  $d_1 d_2 d_3$  と順次交換して右へ持っていき、次に  $c_2$  をこれに作用させるわけだが、交換子で構成されている  $f(c_3)$  とは交換させず、 $d_1 d_2 d_3$  とだけ交換し、 $c_3$  の前で止めたわけである。さらに、このことを  $c_1$  でも行ったのである。この作業を図 5.1 に模式的に表したので参照して欲しい。さてすでに述べたように  $f(c_i)$  というのは  $c_i$  と  $d_1, d_2, d_3$  の全てとの交換子を含み、それに掛かっている項

### [ $\gamma \beta \alpha, d_1 d_2 d_3$ ]の計算手順の模式図

$\alpha$  を( $d_1 d_2 d_3$ )に作用させる

$$\alpha (d_1 d_2 d_3)$$

↓

$$\boxed{[\alpha, d_1] d_2 d_3 + d_1 [\alpha, d_2] d_3 + d_1 d_2 [\alpha, d_3]} + (d_1 d_2 d_3) \alpha$$

$f(\alpha)$

$$= f(\alpha) + (d_1 d_2 d_3) \alpha$$

これに  $\beta$  を作用させる

$$\beta f(\alpha) + \boxed{\beta (d_1 d_2 d_3)} \alpha$$

↓

$$\boxed{[\beta, d_1] d_2 d_3 + d_1 [\beta, d_2] d_3 + d_1 d_2 [\beta, d_3]} + (d_1 d_2 d_3) \beta$$

$f(\beta)$

$$= \beta f(\alpha) + f(\beta) \alpha + (d_1 d_2 d_3) \beta \alpha$$

これに  $\gamma$  を作用させる

$$\gamma \beta f(\alpha) + \gamma f(\beta) \alpha + \boxed{\gamma (d_1 d_2 d_3)} \beta \alpha$$

↓

$$\boxed{[\gamma, d_1] d_2 d_3 + d_1 [\gamma, d_2] d_3 + d_1 d_2 [\gamma, d_3]} + (d_1 d_2 d_3) \gamma$$

$f(\gamma)$

$$= \gamma \beta f(\alpha) + \gamma f(\beta) \alpha + f(\gamma) \beta \alpha + (d_1 d_2 d_3) \gamma \beta \alpha$$

結果

$$[\gamma \beta \alpha, d_1 d_2 d_3] = \gamma \beta f(\alpha) + \gamma f(\beta) \alpha + f(\gamma) \beta \alpha$$

ここで  $f(x) = [x, d_1] d_2 d_3 + d_1 [x, d_2] d_3 + d_1 d_2 [x, d_3]$

図 5.1

は、その交換子に含まれていない項の和で構成されている。だから (5.21) は  $c_i$  と  $d_j$  とのすべての交換子を含み、それに掛かっている項は  $c_i, d_j$  以外の全てである。今は  $C$  も  $D$  も 3 項ずつの話だったが、このことは項が何項あっても明らかになりつつわけで、一般に

補題 D  $C = c_1 c_2 \cdots c_m$ 、 $D = d_1 d_2 \cdots d_n$  のとき

$$[C, D] = \sum_{i,j} \left( [c_i, d_j] \times (c_i, d_j \text{ を除いた項をある順序で配置したもの積}) \right)$$

となる。ちなみにここでの証明の本筋には関係ないが残りの項の順序も書いておくと

$$[C, D] = \sum_{i,j} c_1 \cdots c_{i-1} \left( d_1 \cdots d_{j-1} [c_i, d_j] d_{j+1} \cdots d_n \right) c_{i+1} \cdots c_m$$

である。

各項での一致

補題 C と補題 D を見比べれば、後は

補題 E  $c$  と  $d$  が、 $p$  か位置  $x$  の関数の場合、 $\frac{1}{i\hbar}[c, d]$  は  $\{c, d\}$  を演算子に置き換えたものになる。

ことを示せば補題 B が成り立つことになる。この場合、 $[c, d]$  が 0 でないためには少なくともどちらかが  $p$  でなければならない\*6。そのことに注意すれば

$$[c, d] = \begin{cases} -i\hbar \frac{\partial d}{\partial x_l} & (c = p_l \text{ のとき、} l = 1, 2, 3, \dots) \\ i\hbar \frac{\partial c}{\partial x_l} & (d = p_l \text{ のとき、} l = 1, 2, 3, \dots) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

となることがわかる。

一方ポアソンの括弧は

$$\{c, d\} = \sum_k \left( \frac{\partial c}{\partial x_k} \frac{\partial d}{\partial p_k} - \frac{\partial c}{\partial p_k} \frac{\partial d}{\partial x_k} \right)$$

であるが、この場合も  $\{c, d\}$  が 0 でないためには少なくとも  $c$  か  $d$  のどちらかが  $p$  でなければならない。そのことに注意すれば

$$\{c, d\} = \begin{cases} -\frac{\partial d}{\partial x_l} & (c = p_l \text{ のとき、} l = 1, 2, 3, \dots) \\ \frac{\partial c}{\partial x_l} & (d = p_l \text{ のとき、} l = 1, 2, 3, \dots) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

\*6 もちろん  $c$  も  $d$  も  $p$  なら 0 になってしまうが、少なくともということである。

となることがわかる。よって補題 E が成り立つ。そして補題 C、補題 D から補題 B が成り立つことになり、補題 A が成り立つというわけである。結果、任意の物理量の運動方程式は古典論でも量子論でも同じ項で構成される。これが今まで常に古典論と形式上の一致があった理由である。しかし、だからと言って、平均値の運動が古典論の方程式に従うというわけではない。従うのは一般には、力の場の変化が波束内で小さいときだと思う。ここで証明したことをまとめると

**命題 5.3** 物理量  $B$  の量子論での平均値の時間発展方程式と古典論での時間発展方程式は、それぞれ

$$\frac{d\langle B \rangle}{dt} = \psi^\dagger \left( \frac{1}{i\hbar} [B, H] + \frac{\partial B}{\partial t} \right) \psi \qquad \frac{dB}{dt} = \{B, H\} + \frac{\partial B}{\partial t}$$

であるが、 $B$  と  $H$  が運動量  $p$  の多項式なら、この  $\{B, H\} + \frac{\partial B}{\partial t}$  を演算子に置き換えて、適切な順序に並べると  $\frac{1}{i\hbar} [B, H] + \frac{\partial B}{\partial t}$  に等しくなる。

### 角運動量の例

あまり必要ないかも知れないが、この命題の応用例を書いておこう。角運動量の  $z$  成分

$$l_z = xp_y - yp_x$$

を考える。系のハミルトニアンは

$$H = \sum_{i=1}^3 \frac{p_i^2}{2m} + V$$

とする。まず  $l_z$  の古典論での時間微分は

$$\begin{aligned} \frac{dl_z}{dt} &= \frac{dx}{dt} p_y + x \frac{dp_y}{dt} - \frac{dy}{dt} p_x - y \frac{dp_x}{dt} \\ &= \frac{p_x}{m} p_y + x \left( -\frac{\partial V}{\partial y} \right) - \frac{p_y}{m} p_x - y \left( -\frac{\partial V}{\partial x} \right) \\ &= -x \frac{\partial V}{\partial y} + y \frac{\partial V}{\partial x} \end{aligned}$$

となる。一方量子論では  $\langle l_z \rangle$  の時間微分は、命題 5.3 より、 $\frac{1}{i\hbar} [l_z, H]$  を計算するまでもなく

$$\frac{d\langle l_z \rangle}{dt} = \psi^\dagger \left( -x \frac{\partial V}{\partial y} + y \frac{\partial V}{\partial x} \right) \psi$$

になるはずである。 $x \cdot \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial y} \cdot x$  と順序によらないので、順序もこのままでいい。

さて、 $\langle l_z \rangle$  は、どういう場合に古典論の方程式に従って動くかと言うと、力の場——ポテンシャルの空間微分——の変化が波束内で十分小さく、力の場が波束の平均値での値としてよい場合である。このときは、 $\mathbf{x} = (x, y, z)$ 、 $F_x = -\partial V / \partial x$ 、 $F_y = -\partial V / \partial y$  として

$$\begin{aligned} \frac{d\langle l_z \rangle}{dt} &= \sum_{\mathbf{x}} \psi^*(\mathbf{x}) \left( x F_y(\mathbf{x}) - y F_x(\mathbf{x}) \right) \psi(\mathbf{x}) \\ &\cong \langle x \rangle \cdot F_y(\langle \mathbf{x} \rangle) - \langle y \rangle F_x(\langle \mathbf{x} \rangle) \end{aligned}$$

となる。力の場が波束内で変化が十分小さい場合  $\langle x \rangle$  と  $\langle y \rangle$  の時間発展も古典論の方程式に従うので、角運動量の平均の時間発展も古典論の方程式に従うことになる。

## 第II部

# 量子力学における測定



## 第6章

# 位置の測定

### 6.1 測定とは位置、長さを測ること

物理学の測定というのは、基本的には長さを測ることに帰着する。その理由は、物理というものは、色やにおいや音などのさまざまな現象を粒子の位置で説明しようとする試みだからだと思う。そして位置を測るとは、ある基準点からの長さを測ることなわけだから、物理とは、この世界を長さで説明しようとする試みなわけである。これは人の心に自然に浮かんでくる世界像ではないだろうか。デカルトもこのような世界像をいっていたし、古代ギリシャ人のデモクリトスやエピクロスもいっていた。長さを測るとは、基準となるものさしの端と端で位置の一致を確かめて測るわけである(図 6.1)。その一致は、目か、さわった感触で確かめる

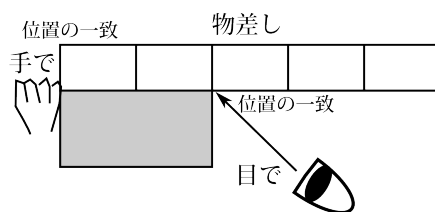


図 6.1

わけである。ところで我々には五感がある。自然法則というものは、感覚と感覚の関係だと言える。長さですべてを説明するとは、長さですべての感覚を説明するということである。しかしながら、一体なぜ、多くの感覚があるのに、長さで他の感覚を説明しようとするのか。すべての現象を色やにおいて説明してもいいではないか。我々はリトマス紙の色で酸性かアルカリ性かを判断しているし、りんごの色で甘さを判断する。雲の色で大雨を予測もするではないか。これに明確に答えるのは難しいが、測定とはある基準のものに等しいと判断する行為(又はそれとの比較)である。となるとそのためには長さを使うのがいいのである。その理由としては

1. 固体の長さというものが時間が経っても、ほとんど変化しないという安定性が理由の一つであろう。つまり、二つの棒の長さが一致していれば、次の日もほぼ一致しているわけである。においは時間とともにすぐ変わるし、色もすぐあせる。ただ、これは程度の問題ではある。又、もうひとつ理由として、
2. 判断が人に依らないという客観性がある。ある人が長さが等しいと判断すれば、おそらく別の人も等しいと判断しよう。色の場合は、同じ色だ

という判断が長さほどは人によって一致しない。においなどなおさらである。ただこれも程度の問題である。又、これは理由と言えるかどうか分からないが、

3. 長さは等しいものに分割でき、又、それを合わせることができる。

つまり長さは数なのである。量と言ったほうがいいかもしれない。色やにおいは等しいものに分割できないのである。自然現象というものは連続である。痛いと言っても程度があり、速いと言っても程度がある。言葉というものは不連続である。一方数は連続である。だからこの連続な自然を表すには数がいいのである。数とは、等しいものの集まりにおいて、それを数えたものであり、指で1個2個と数えるように一対一の対応のことである。

測定とは基本的に何か基準のものに等しいと判断することだが、私が思うに完全に等しいものは、長さ（つまり空間での等質性）と電子のような素粒子だけのような気がする。同じ色、同じ音と言っても実際は微妙な差があることだろう。そういうわけで、測定とは基本的には長さを測るということであり、その前提でこれからの議論を進める。それでは長さ以外の、例えば音で全ての現象を説明できないのか、と言えば、できると思う。というのは長さと音が一対一に対応していれば、音は長さに変換できるからである。そして例えばおいを長さで説明できると言うなら、その長さを音に変換できるわけで、音によってにおいも説明できるというわけである。ただ実用的でないことは明らかである。

## 6.2 粒子検出装置

測定とは基本的には位置を測ることであり、長さを測ることであるということをお前節で述べた。量子力学で1つの粒子の物理量を測ろうと思えば、その粒子、又はその粒子と反応させた粒子の位置を測るしかないと思う。それでこの節では原子や電子のような微粒子の位置の測り方を述べたい。

### 霧箱

まず有名なものに霧箱がある（図 6.2）。これは過飽和水蒸気中に荷電粒子を突入させると、それが刺激となって、粒子の通った跡に霧状の水滴ができるのである。写真で見たことがある人も多いだろう。粒子が通った跡がはっきりわかるのである。ただ肉眼で見えるくらいだから精度は悪い。混じり物のない純粋な水蒸気は液体になるべき温度まで冷えても液体にならない。雨が降るのも空中に核となるゴミがあるからである。荷電粒子が突入すると、細かい仕組みはわからないが、それが刺激となって水滴ができるのだと思う。ここで注目してほしいのは位置を測定しても軌跡は一定の向きを持って動いているということである。決して位置を測定したからと言って、運動量が全くわからない状態に移るのではないということである。粒子が霧箱に入ると白い線が見える。量子力学の法則によれば、その入った位置、図 6.2 では軌跡の左端の点 A に波動関数は収縮するはずである。そして運動量の確率分布はすべての運動量で等しいという状態になるはずである。しかしそうっていない。位置の測定に幅があるからと考えるかもしれないが、それでも、運動量は左右両方向持っていないなければならない。しかし粒子は一定方向に向かって動いている。これは量子力学の法則に反することである。

### ガイガーカウンター（放射線計数機）

ガイガーカウンターというのは名前しか知らず、これを書くために調べた。図 6.3 のようにガラス管の中にガスを入れる。α線などの放射線が侵入するとガスは電子と陽イオンに電離する。ガラス管の両端に高電圧をかけておけば電荷はそれぞれの極に移動し、電流が流れる。それを検知して放射線が侵入したことを知る。こ

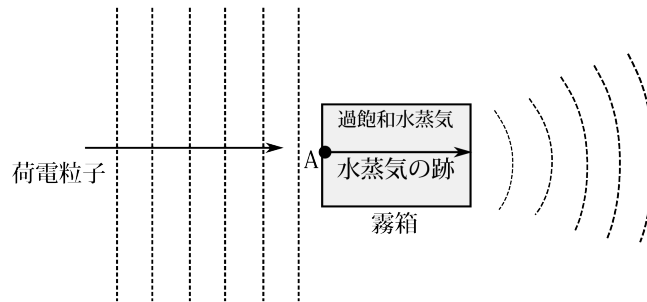


図 6.2 霧箱。破線は波動関数の波の山を表す。粒子が霧箱に突入すると白い線が現れる。波動関数はその白い線上の点 A に収縮するはずである。

れだと位置の精度はガラス管の大きさ程度で、かなり粗い。

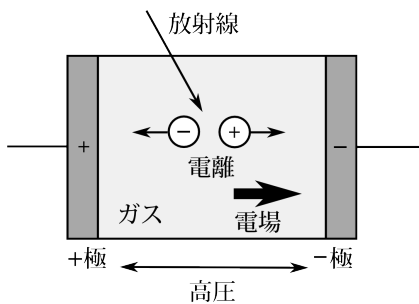


図 6.3 ガイガーカウンター

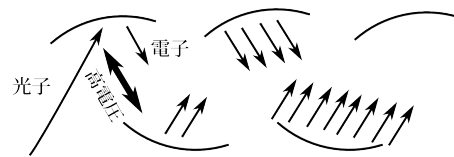


図 6.4 光電子増倍管

### 光電子増倍管

光子を検出する装置として光電子増倍管がある(図 6.4)。これは光の光電効果を使ったものである。光子が金属面に当たると電子が飛び出る。その電子に電場をかけて加速させてやり、次の金属面にあたるようにする。すると電子が何個か飛び出る。例えば 5 個としよう。その 5 個にまた電場をかけて、次の金属面に当たらせる。これを繰り返せば指数関数的に電子数が増え、やがて電流として検出される。これも位置の精度は悪い。

こんなふうに粒子の検出はその粒子の効果を増幅することによって人間が知覚できるようにしているのである。電子一個、光子一個が目に入ってもそれに対して人間の肉体自体は物理的な反応はするだろうが、意識としては自覚できないのである。

## 6.3 粒子検出の意味

粒子の検出があったと言えるためには、過程のある決定論としての物理法則が必要である。例えば霧箱なら、我々には単に白い線が見えるだけである。その線上を荷電粒子が通ったと言えるためには、荷電粒子が過飽和水蒸気を刺激して水滴つくることが法則として確立していなければならない。光電子増倍管でも、我々が感知するのは単に電流が流れたということだけである。そこに光子が来たと主張できるためには光子が金属にぶつかると電子が飛び出すという法則が確立していなければならない。光子が金属にぶつかって電子が

飛び出すことは古典電磁気学では説明がつかないから、これは量子論かと言えば全くそういうことでなく、光子が金属にぶつかり電子が飛び出すという過程が決定論として確立しているならそれは、概念的には古典論に入る。このように過程が物理法則として確立していなければ電子が来たとか、光子が来たなどとは言えない。我々は直接電子を目で見えるわけではないのだから。そしてこの過程は必ず決定論(古典論)としての法則なのである。というのは量子論では測定は瞬間である。あるとき運動量がどれだけだった、位置がどこそこにあった、というように瞬間である。A が起きたら B が起きるという過程がないのである。古典論では過程がある。ある速度をもってある位置を通り刻々と変化する。ただ量子論でも波束には運動の過程がある。

量子論の測定では必ずこの決定論(古典論)の世界、現実の世界に入らなければならない。

その世界にいつ入るかだ。後の第7章で述べることだが、電場、磁場で軌道を曲げて運動量を測るとき、この曲げられる過程を古典論に入れてしまうか、粒子検出の過程から古典論に入れてしまうかだ。決定論は正しくないのにそれを測定時の理論的根拠にしなければいけないというのは全くもっておかしな話である。

## 6.4 位置の測定精度には限界があるか

位置検出器は人間の知覚の鈍さのため、かなりの大きさになる必要がある。となると、位置は検出器の大きさ程度の精度でしか測ることができないのか、位置を限りなく正確に測ることは出来ないのかと疑問が湧くと思う。それについては粒子の位置というのが正確には何を意味するのかを明確にしなければ何も言えないと思う。電子がある位置から 1nm 以内に存在している、又は存在していたとは、いったいどういう物理的効果があるのか。そういうことをまず明確にしなければならないのだと思う。非常に素朴に考えれば、位置の精度には限度はないと思う。そのことを光学顕微鏡を用いて簡単に説明しよう。

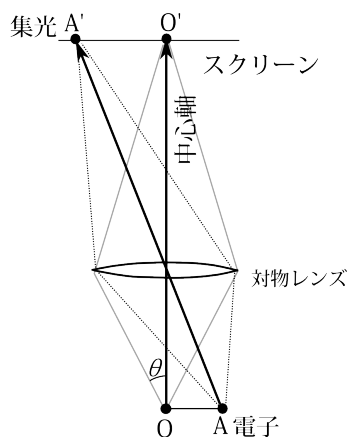


図 6.5 光学顕微鏡で電子の位置を測る。

図 6.5 のように、電子に光をあてて、その散乱した光をスクリーン上に集光させる。光はスクリーン上の点 A' に集光したとしよう。顕微鏡の中心軸上の点 O' と A' との距離を測って、電子が中心軸上の点 O からどれだけ離れていたかを知ろうというわけである。スクリーンには光子の検出器があるわけだが、検出器の大きさの分だけ誤差がある。又、集光した光の像にも広がりがあるのでその分も誤差になる。まず検出器の誤差を取り除くには倍率を上げれば良い。つまり、対物レンズを薄くして、スクリーンと対物レンズの距離を広げ

O'A' の距離を広げれば良い。そうすれば、検出器の大きさの誤差は相対的に小さくなる。光の像の広がりを小さくするには対物レンズを広げればよい。顕微鏡での位置の精度は、 $\lambda$  を光の波長、 $\theta$  を軸と対物レンズの開きの角度として、 $\lambda/\sin\theta$  と考えられる (9.4 節参照)。 $\theta$  を広げれば、精度はいくらでもよくなる。

しかしながら、これは光が波として振る舞うとしての理屈であって、実際は光は粒子として検出される。それゆえ位置の精度として、この  $\lambda/\sin\theta$  を使うことには問題がある。それに光の回析のために、位置の精度について、この範囲に 100 % 存在すると断定することはできない。ここらへんは 9.6 節でも述べているので参照して欲しい。そういうわけで、位置を限りなく正確に測ることができるかという問題は、今のところ、私にはわからないし、最初に述べたように、位置がこの範囲に存在するということがいったい何を意味するのかを——もちろん直接検出器で検出されれば別だが——明確にしなければ答えられない。そしてその「意味を明確にする」ことが難しいのだと思う。

## 6.5 量子論での運動量、エネルギーなどは何を意味するか

量子論と古典論では物理量の概念が異なる。例えば、エネルギーは  $\frac{p^2}{2m} + V$  (運動エネルギーと位置エネルギーの和) であるが、量子論によれば同時刻の位置と運動量を両方正確に決めることはできないということになっている。ということは運動エネルギーと位置エネルギーを同時に正確に決めることができないということであり、エネルギーの値を正確に決めることはできないはずである。ところが量子論によれば正確に決まるのである。だから量子論と古典論でのエネルギーの概念は全く同じとは言えない。しかし全く別物というわけでもない。

量子論での物理量も粒子がたくさん集まれば、その和は古典量と一致していなければならない

はずだ。量子論的にエネルギー  $\varepsilon$  の粒子が  $N$  個集まれば、古典論ではそのエネルギーは  $N \cdot \varepsilon$  に近い値を示すだろう。量子論的に運動量  $p$  の粒子が  $N$  個壁に当たれば、壁は (粒子は吸収されるとして) 運動量をおよそ  $N \cdot p$  受け取るはずである。

## 第7章

# 1 粒子の物理量の測定

### 7.1 測定パターン

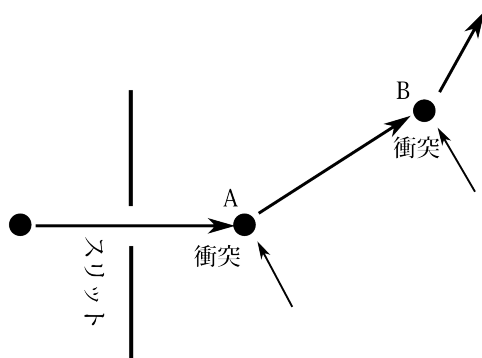


図 7.1

1つの粒子の物理量というものをどうやって測ればいいのか。例として、あるスリットから飛び出してくる粒子の運動量を正確に測りたいとする(図7.1)。古典力学では運動量とは速度×質量である。速度を知るためには2つの瞬間での2点間の距離と移動に要した時間を知らなければならない。粒子の位置を知るために、他の粒子を衝突させたとしよう。その衝突の位置Aは正確にわかったとしよう。しかし衝突させると速度が変わってしまう。そして少し時間がたって、また何か別の粒子を衝突を衝突させてその衝突の位置Bがわかったとしよう。ABの距離がわかり、その間の時間もわかれば速度は正確にわかる。しかし我々が知りたいのはスリットを通ったときの速度であり、他の粒子と衝突した後の速度ではない。このように運動量を知ろうと思っても簡単なことではないのである。

一つの粒子の物理量をいったいどうやって測るのだろうか。教科書などには肝心の測定方法というのがあまり出てこないのである。その少ない中から、その本質を抽出すると以下のような測定法になるのだと思う。それは

- 【1】測定したい運動量やエネルギーなどの物理量の値の大きさごとに、粒子を空間で分離する。
- 【2】分離した粒子の位置を測り、その位置から、その物理量の値を知る。

というものである。2つの粒子を衝突させるにしろ、又、どんな複雑な過程のある実験でも最終的には1つの

粒子の物理量を測定しなければならず、必ずこの過程が含まれなければならないのではないだろうか。運動量とスピンを例として考察しよう。

## 7.2 運動量、スピンの測定

### 運動量

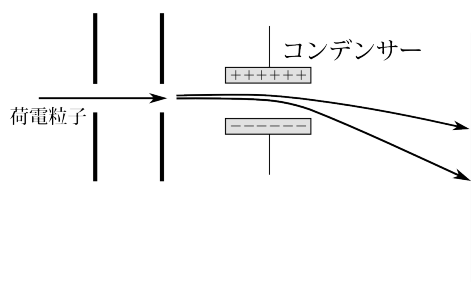


図 7.2 荷電粒子に電場をかければ、速度に応じて異なる場所に来る。

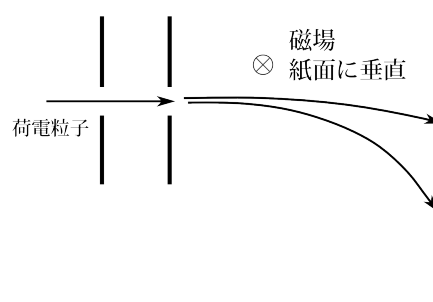


図 7.3 荷電粒子の運動方向に直角に磁場をかければ、速度に応じて異なる場所に来る。

スリットを通ったときの荷電粒子の運動量を知りたいとする。その粒子に電場をかけ、スクリーンにぶつかる (図 7.2)。速度の違いによってぶつかる位置が異なる。速ければあまり曲がらない。遅ければよく曲がる。そのぶつかった位置から古典力学によって軌道を計算し速度を割り出す。これでスリットを通ったときの速度がわかる。同様な測定は磁場で軌道を曲げてでもできる (図 7.3)。磁場を軌道と直角方向にかければ粒子はローレンツ力を受ける。速ければあまり曲がらず、遅ければよく曲がる。実際、このような方法によって電子の質量と電荷の比を求めたのである。

### スピン

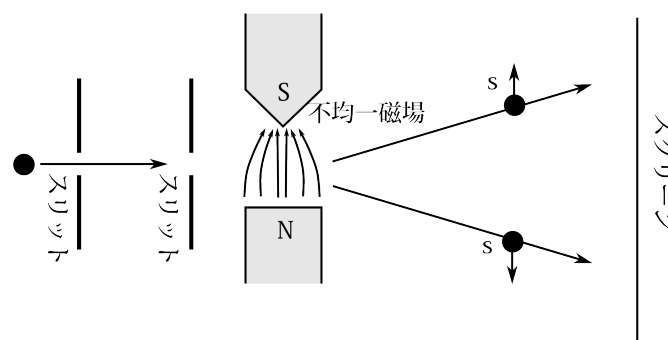


図 7.4

スリットを通ったときの粒子のスピンの値を知りたいとする (図 7.4)。有名なシュテルン-ゲルラッハの実験である。粒子は電荷をもったスピン 2 分の 1 の粒子だとする。その粒子を不均一磁場に通す。そして後方のスクリーンにぶつけてその位置からスピンの値を求める。電荷を持ったスピン 2 分の 1 の粒子を不均一磁場に

通すと粒子は図 7.4 のように上か下に行く。古典電磁気学によれば磁気モーメントを持つ物体は不均一磁場で力を受ける。磁石と磁石が引き合うと思ってもらえば良い。スピンの上に向いていると軌道は上に行くように磁石の向きを設定してあるとする。上の地点に粒子が来たら、その粒子は、スリット通過時点でスピンは上向きだったのだと結論する。こうやってスピンが測定できる。

### 7.3 スリット通過時に古典論に入るのは正しくない

さて、以上の測定方法では粒子は古典力学に従って運動するとしている。私の知る限りすべての本でこのような説明をしていると思う。しかし粒子はシュレディンガー方程式に従って動くのである。古典力学に従うとしては誤った結論に導かれてしまう。その理由は2つある。まず、それが明白に分かる例として、トンネル効果について述べよう。

#### トンネル効果、回析の効果

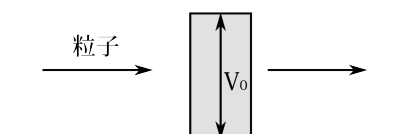


図 7.5 トンネル効果の模式図。運動エネルギーがポテンシャルの壁より小さくても通過することもある。

図 7.5 のように粒子がポテンシャルにぶつかり、そこを乗り越えるか、乗り越えないかで粒子の運動量を測るという実験を考えよう。初等的教科書にも出ていることだが、粒子の運動エネルギーがポテンシャル  $V_0$  より小さくても、粒子はポテンシャルの向こうへ透過しうる。いわゆるトンネル効果である。しかし、もし粒子は古典力学に従うとして、運動量測定にこの装置を使うと、ポテンシャルを通過した粒子は運動エネルギーが  $V_0$  より大きかったと判断してしまうのである。もちろんトンネル効果が起きる確率は小さいのであり、古典力学に従うとしても、大部分の粒子では正しい判断ができるのだが、たまに間違った判断をしてしまうのである。

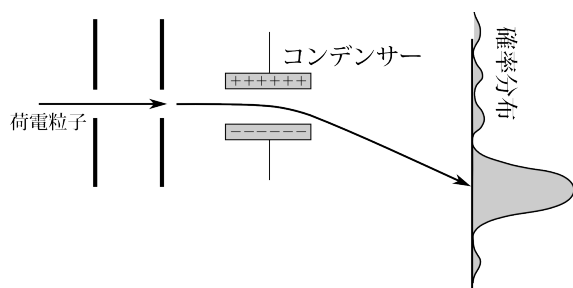


図 7.6 ある運動量の測定状態にある粒子のスクリーン上での確率分布。回析のため必ず広がりを持つ。

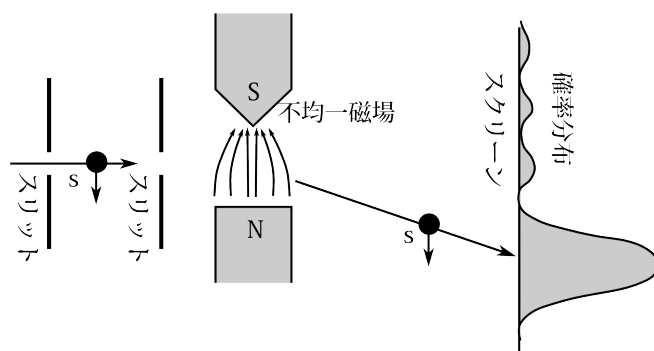


図 7.7 スピン下向きの粒子のスクリーン上での確率分布。回析のため広がりを持つ。

運動量の例でも運動量のある測定状態にある粒子がスリットを通ったとしても、回析のため粒子のスクリー



ン上での確率分布は図 7.6 のようになり、古典力学的には他の運動量の粒子が来るべき位置にもわずかながら行く確率があるのである。スピンの例でもたとえスピンが下向きに偏った粒子がスリットを通過しても、回析のため、スクリーン上での粒子の確率分布は図 7.7 のようになり、上向きスピンの粒子が来るべき位置にも僅かながら粒子が行く確率があるのである。

ただ第 4 章、第 5 章で述べたように、波束内で電場の変化が小さければ、磁場がある場合は波束内で磁場の変化が小さく磁場の空間微分が小さければ、波束の運動は古典軌道に近いので古典軌道で測定結果を推測しても大きく間違わないのだと思う。そこらへんも今から述べる。尚、スピンの波束が古典軌道に従うことについては付録 C で述べてある。

### 波束が収縮するまではいろんな成分を持っていた

スリット通過後古典力学に従って動くと考えたと誤った結論に導かれてしまうもう一つの理由を述べよう。スクリーンで粒子が検出されるまでは、粒子の波束は図 7.8 のように広がっていた。そして粒子が検出されて波束はその点に収縮した。つまり、スリット通過時は、検出位置に対応する運動量を含め、いろんな運動量を持っていたが——これは適切な言い方では無いかもしれないが——波束の収縮で消えたのである。そして前にも述べたように、ある瞬間の物理量とはその確率分布に他ならないと私は考えているので、スリット通過時の運動量を粒子の検出位置からは決して断定できないのである。

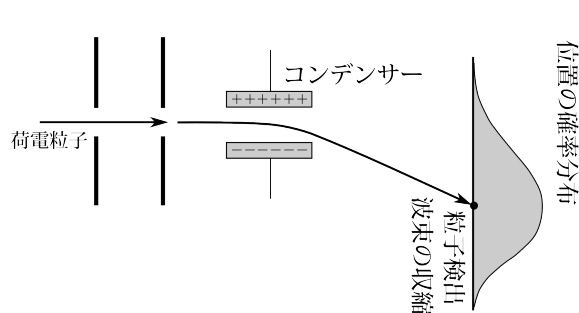


図 7.8

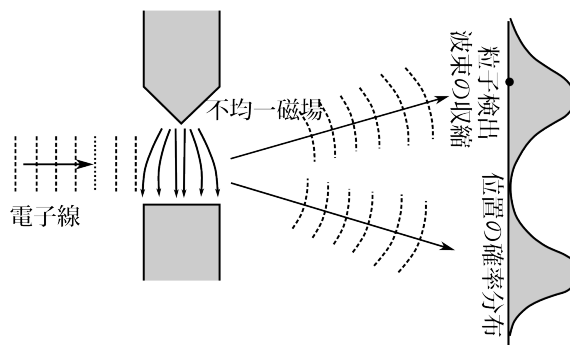


図 7.9

スピンでも同様である。たとえ粒子が上の部分で検出されたとしても、図 7.9 のように、検出される前までは上にも下にも波束があったのであり、それが検出時の波束の収縮で 1 点に収縮しただけである。波束の収縮で下成分は消えたのである。スリット通過時の波束は上成分も下成分もあった。だから私の解釈では、粒子が上で検出されたとしても、スリット通過時のスピンの上だったとは断定できないのである。

それで、粒子が検出されるまでの過程を量子力学で扱おう。つまり位置が検出されるまでは

$$i\hbar \frac{d\psi}{dt} = H\psi$$

に従って動き、位置が測定されるとその位置に波束が収縮する。どこに収縮するかの確率は位置の確率振幅の絶対値で決まる。トンネル効果や回析の例で古典軌道で扱ってはだめな理由を述べたが、それ以前に、古典力学は正しくないのであって、量子力学で扱うべきなのである。

## 7.4 検出までを量子力学で扱う（運動量）

まず運動量から分析しよう。少しまどろっこしいが、順を追って場合分けして考えよう。まず回析を無視できる場合を考え、次に回析を考慮する。おのおの場合でスリットでの初期状態がわかっている場合とわかっていない場合を考える。もちろん知りたいのは初期状態が未知で回析を考慮する場合である。回析を無視できる場合というのは——回析はどんな系でもあるのだが——無視しても結果にほとんど影響を与えないほど回析が小さい状況だという意味である。

状態がわかっているというのは運動量がわかっている場合と言っていいと思う。これは4.5節でも述べたことである。測定というのは幅があり、運動量を測定するということはある範囲からある範囲に運動量があるということを知る行為である。一方状態が既知の場合というのは運動量と位置の確率分布が既知ということであり、運動量がどの範囲にいるのかがわかっている場合である。つまり、既に測定されてしまっている場合だと考えられるわけである。もちろんこれについては異議もあろうが、こゝら辺は言葉の使い方の問題であり、あまり気に留めないでいただきたい。大事なのが何が起きるかということである。

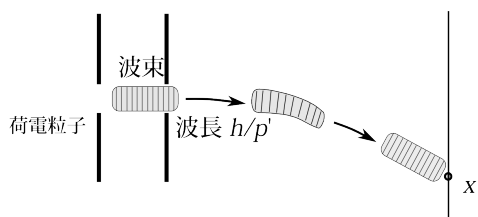


図 7.10 波束内の線は波の山を表す。

今粒子はスクリーンの  $x'$  という位置で検出されたとする。この  $x'$  に対応する運動量を  $p'$  とする。対応するというのは、スリットで運動量  $p'$  の測定状態にある粒子はスクリーンで  $x'$  を中心にした確率分布を示すという意味である。運動量の測定状態にある粒子の位置の確率分布は無限に広がってしまい、こんなことにはならないのだが、これは確率分布が運動量  $p'$  付近のある幅を持った状態だと考えてもらいたい。そうすると波束は図 7.10 のように、ある範囲内にだいたいおさまり、第 4 章、第 5 章で述べたように、その波束は近似的に古典力学の方程式に従って動く。だからこの  $p'$  というのは古典力学の方程式に従えば、 $x'$  の位置に到達するはずの運動量といっても——全く同じではないであろうがここではそういうことを議論したいわけではないので——いいと思う。

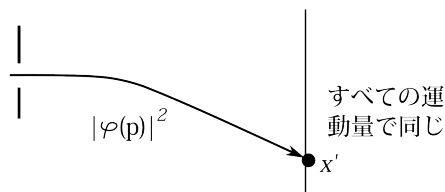


図 7.11 回析は無視。初期状態  $\varphi(p)$  は既知

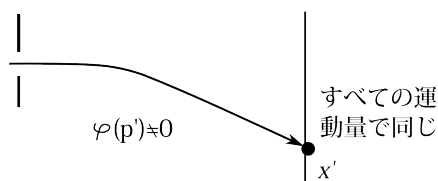


図 7.12 回析は無視。初期状態  $\varphi(p)$  は未知

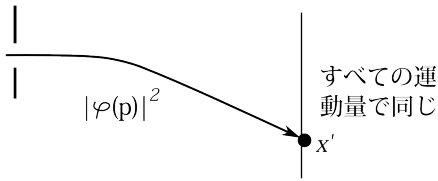


図 7.13 回析を考慮。初期状態  $\varphi(p)$  は既知

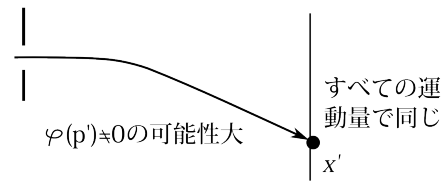


図 7.14 回析を考慮。初期状態  $\varphi(p)$  は未知

### 回析は無視、初期状態既知

まず、回析が無視でき、スリットを通過するときの量子力学的状態がわかっている場合を考える。その運動量表示の確率振幅を  $\varphi(p)$  とすると、スリットでの運動量確率分布は単に  $|\varphi(p)|^2$  というだけであり、運動量はわかっているということである。

スクリーンで検出されたときの運動量はどうか。スリット通過のとき、運動量表示で  $\varphi(p)$  という確率振幅を持っていて、位置  $x'$  で粒子が検出された。状態は位置表示で

$$\delta(x - x')$$

に収縮し運動量の確率分布はすべての運動量の値で同じ値になる。簡単に言えば、運動量の値は全くわからなくなってしまうということである。実際は測定に幅があるのでデルタ関数には収縮しないが、位置の確率振幅が幅のあるデルタ関数に似たものに収束するにせよ、運動量が0を中心にとどの方向も均等に分布するかという決めてそうでなく、霧箱の例(6.2節)では検出前の運動量の向きを保持している。しかしそういうことを考えても、分析のしようがないので形式的な量子力学の法則に従ってデルタ関数に収束するとして話を進める。この結果を模式的に書くと図 7.11 のようになる。

### 回析は無視、初期状態未知

次に回析が無視でき、初期状態が未知の場合を考える。初期状態が未知と言ってもなんらかの量子状態にあるはずである。状態を知らないというのは、ただ単に観察者が知らないだけで、他の人は知っているという場合もある。今の場合そういう場合でなく、状態を知るための痕跡を自然界に残していないという場合である。さて、位置  $x'$  で検出されれば  $\delta(x - x')$  に収縮するのは前と同様である。だからスクリーン上での運動量の確率分布はすべての運動量の値で同じ値になる。今は回析は無視できるほど小さいというのだから、位置  $x'$  成分に対応する運動量  $p'$  成分を持っていないければ位置  $x'$  で粒子が検出されることはない。だからスリット通過時には、少なくとも運動量  $p'$  の成分をもっていたはずだとは言える。だから初期状態の運動量の確率振幅  $\varphi(p)$  は未知だが、少なくとも  $\varphi(p') \neq 0$  であることは言える。この結果を模式的に書くと図 7.12 のようになる。しかし粒子が1つだけ来ただけでは  $\varphi(p')$  の大きさがどれほどなのかは何とも言えない。

### 回析考慮、初期状態既知

さてこれからは回析を考慮する。まず初期状態が既知の場合だが、このときもスリットでの運動量確率分布は  $|\varphi(p)|^2$  であることは同じであり、スクリーンで  $\delta(x - x')$  に収縮するのだから運動量の確率分布はすべての運動量の値で同じ値になる。この結果を模式的に書くと図 7.13 のようになる。

### 回析を考慮、初期状態未知

次に初期状態が未知の場合を考える。初期状態がわかっているなら測定する必要はないのだから、この場合こそ運動量を測定したい場合である。この場合もスクリーン上での運動量の確率分布はすべての運動量の値で同じ値になる。回析を考慮すると位置  $x'$  で検出されたからと言って、初期状態で  $x'$  に対応する運動量  $p'$  の成分を持っていたとは言えない。というのは例えばスリット通過時に、 $p'$  と異なる運動量の測定状態にある粒子でも、回析のため  $x'$  に来ることはありうるからである。しかしながら回析が起きる割合というのは非常に小さい。というより回析があまり起こらないように装置をセットしているはずである。だから初期状態の運動量の確率振幅  $\varphi(p)$  は未知だが、おそらくは  $p'$  成分をもっていたであろうと推測できる。つまり、 $\varphi(p') \neq 0$  である可能性は高いとは言える。しかし回析が大きければその可能性もその分低くなる。そして  $\varphi(p')$  の大きさについては何もわからない。この結果を模式的に書くと図 7.14 のようになる。この位置  $x'$  に対応する運動量がとんでもない高エネルギーで、室温の実験ではありえないような状況であれば、 $p'$  成分があったとは推測せず、回析のためだろうと考えるであろう。だから、 $\varphi(p') \neq 0$  の可能性が高いという推論するにあたって、 $p'$  成分を含んでいる可能性はそれなりにあったということがもともとの前提としてあるのである。今、スリット通過時の状態は未知だとしているが、実は何もわからないのではなく、実験室の温度などからある程度、運動量の状態についての知識があるわけである。ここらへんの状態が未知、既知というのもよくわからない領域である。

### 結論

以上の分析結果を表にすると以下ようになる。

分析法、状況	スリットでの運動量	スクリーンでの検出後の運動量
回析無視、 $\varphi(p)$ 既知	$ \varphi(p) ^2$	すべての運動量で同じ
回析無視、 $\varphi(p)$ 未知	$\varphi(p') \neq 0$	すべての運動量で同じ
回析考慮、 $\varphi(p)$ 既知	$ \varphi(p) ^2$	すべての運動量で同じ
回析考慮、 $\varphi(p)$ 未知	$\varphi(p') \neq 0$ の可能性大	すべての運動量で同じ
スリットから古典論	$p'$	不明

最後の段には粒子がスリットから古典軌道を通してスクリーンに衝突するとしての結果も加えた。軌道を量子力学的に扱った測定結果というのは、回析を考慮して、初期状態が未知の場合である下から 2 段目のものである。スリットでの運動量は古典軌道を通ると考えた場合は  $p'$  であり、量子状態で考えた場合ではせいぜい  $p'$  の確率振幅を持つ可能性が大きいとしか言えない。粒子が 1 つだけ検出された場合はこの程度のことしか結論は出せないのだと思う。正しいのはもちろん粒子検出までを量子力学の時間発展方程式で扱った方であるが、量子論では運動量の定義が明確でないのでスリットでの運動量と言ってもあまり意味がないと思う。それよりも、科学とは我々が知覚可能なものの関係なのだから。何が起きるか、どこで粒子が検出されるかが大事なことだと思う。

## 考察

スリットでの運動量は、古典軌道を通ると考えた場合は  $p'$  だと断定し、一方、量子力学的に扱った場合には——回析を無視したとしても—— $p'$  を含めたいろんな成分があったという。この二つにどういう違いがあるのだろうか。我々に知覚可能な違いがあるのだろうか。

さて、今、この測定される粒子と相互作用する粒子を含めた確率振幅で考えてみよう。相互作用している粒子というのは、磁石を構成している粒子であったり、スリットを構成している粒子であったり、スクリーンを構成している粒子であったりする。その多数ある粒子の位置変数を一つの文字  $x_{\text{外}}$  で代表することにする。そして測定される粒子がスクリーンで検出される直前の確率振幅を

$$\psi(x, x_{\text{外}})$$

だとする。これは  $x$  の値をパラメータとして  $x_{\text{外}}$  についての確率振幅があると考えられることができる。粒子が  $x'$  で検出されたことにより、確率振幅は

$$\psi(x', x_{\text{外}})$$

に収縮するが、 $x_{\text{外}}$  についての確率振幅としてこれが選ばれたわけである。現実には起きたことはただこれだけのことである。古典軌道論で考えた場合のスリットで運動量  $p'$  であったなどは決して言えない。しかしながら場合によってはこの確率振幅が選択されたことによって運動量が  $p'$  であったと考えてもよさそうな場合もあるかもしれない。これは運動量の保存ということを使うのだが、そのことを運動量の場合で説明するのは難しいので、スピンの場合 (7.7 節) で説明する。

私は

今ここを通った粒子の運動量を測ってくれと言われても測りようがない

と思う。では確率振幅が  $\varphi(p)$  の状態にあるというのはいったい何を意味しているのだろうか。測りようがないのに、 $|\varphi(p)|^2$  が確率分布だと言っても意味がないではないか。これは難しい質問だが——そしてそんな疑問が湧くこと自体が量子力学の欠陥なのだろうか——これを位置の確率振幅に変換したものが位置の正しい確率分布を与えるというのが、その意味するところだと思う。それなら、その確率振幅  $\varphi(p)$  は運動量とは何の関係もないではないかと思われるかもしれない。私もそう思うがあえて関係づけるとすれば、第 4 章、第 5 章で見たように、運動量  $p$  付近の波の重ね合わせの波束 (位置の確率分布) はそれに対応する速度  $p/m$  で動くのである。

測定というものはどこかで古典論の世界に入らなければならない。軌道の運動を量子論で扱ったと言っても粒子の検出では古典力学的に扱わなければならない。量子力学のままでは確率振幅のままであり、現象が現れないからである。ただ、これはいいすぎかもしれない。波束の運動は決定論であり、現象と言えるかもしれない。おそらく、なるべく過程の後の段階まで量子論で通したほうがより正確な結果がえられるのではないだろうか。

## 7.5 多くの粒子で実験する場合

今は粒子が 1 つだけ来た場合であったが、実際の実験では膨大な数の粒子が飛来する場合を扱うであろう。今粒子が多数来て、スクリーン上で図 7.15 のような粒子数分布が得られたとしよう。そして、実験はある一定時間続くわけだが、我々の知りうる限り同じ状況で実験をしたとする。そうなると次にくる粒子のスリット

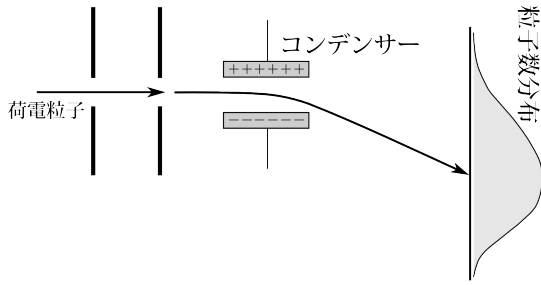


図 7.15

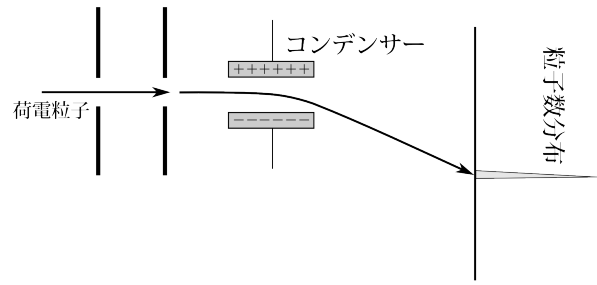


図 7.16

通過時の状態は、運動量の確率分布がその粒子数分布に対応したものが来ると予想していいのではないだろうか。だから、例えば、粒子数分布が図 7.16 のように、すべての粒子がほぼ同一の点にばかり来るなら、次に来る粒子のスリット通過時の状態はその点に対応する運動量の測定状態になっていると予想できる。私が言いたいのは、量子力学では初期状態をいかにして知るかという問題があるが、このように同一の実験を繰り返せば初期状態が予想できるということである。

さて、もしスクリーン上の位置  $x'$  に粒子がアボガドロ数程度来たら、 $x'$  でスクリーンの受け取った運動量はどの程度となるだろうか。私は、その位置に対応する運動量  $p'$  にその粒子数を掛けたものになると思う。それは古典力学は粒子数の多いとき、回析を無視できるときにはおおむね正しいからである。となると  $x'$  に来た粒子の運動量はスリット通過時に運動量  $p'$  を持っていたと考えても良さそうである。ただ量子力学の枠組みではそういう結論は導き出せない。そういう結論に持っていくには量子力学を超えた解釈が必要である。

1つの粒子がスクリーンで検出されてもスリットでの運動量については何も言えないに等しいが、同じ状況で膨大な粒子がスクリーンで検出される場合、

- スリットでの状態の推定が可能
- スクリーンが受け取る運動量がわかる

のだと思う。

## 7.6 運動量測定状態への収縮

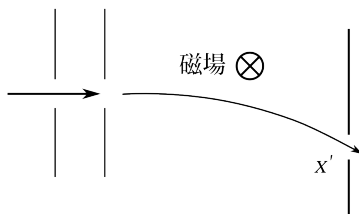


図 7.17

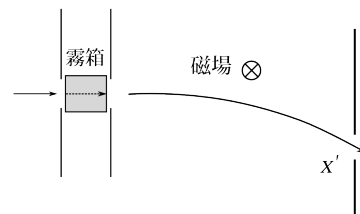


図 7.18

今の実験と関連して、運動量の測定状態というものを作ることができるか考えたい。今、 $x'$  に穴を開けて波が通れるようにする（図 7.17）。波の一部は  $x'$  を通ることになる。この  $x'$  を通った波だけ見れば運動量の測定状態となるだろうが、実際はこれは波の一部であり、他の部分は残っている。粒子がスクリーンに衝突す

るはずの時間になってもスクリーンで粒子が検出されなかったら粒子は  $x'$  を通ったはずだとわかる。となると波は  $x'$  を通った波束のみとなり、他は消える。これは運動量の測定状態と言えなくもない。しかしながら粒子が1つだけ最初のスリットを通ったと、どうやって知ることができるのだろうか。そのことを確かめるためには最初のスリットのところに霧箱を置いてみるとよい。霧箱で軌跡が見られる (図 7.18)。そして粒子が霧箱を通過した後いつまでたってもスクリーンに來なければ、 $x'$  を通ったとは言える。しかし、そのためにはいつまで待てばよいのだろうか。常識的には霧箱の軌跡から速度を概算して、およその着く時間はわかる。だからほぼ 100 % の確率で  $x'$  を通ったとは言える。だからその常識的な時間待てば、 $x'$  を運動量測定状態の単色波が通ったとは言えそうである。だから運動量測定状態への波束の収縮はあると思う。ただ、これは、与えられた状況で、例えばスリットを通った粒子の運動量を知りたいというような状況で、運動量を測って、その結果運動量の測定状態に収縮したわけではない。運動量の測定状態を作り出しているのである。もちろんこれでも  $x'$  を通り抜けた粒子の運動量はわかるわけだから測定したと言えそうとも言えるが、与えられたものを測っているのではないことには注意。又、今の場合も  $x'$  を通った波にも回析した成分が入ってくるので完全な運動量測定状態ではない。尚、この分離して一部を通すという方法は他の物理量例えばスピンの場合などにも適用できる。

#### 古典軌道論と量子軌道論での予測の一致

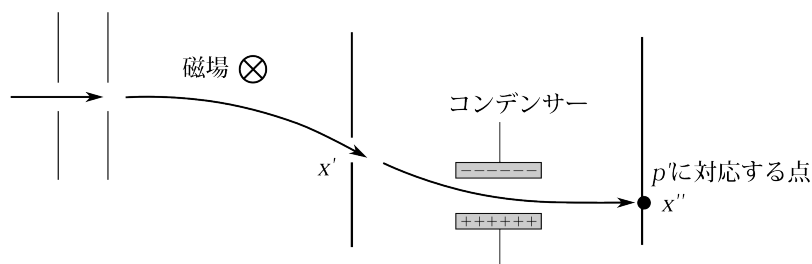


図 7.19

さて、図 7.19 のように、この  $x'$  を通った波を再び電場や磁場で曲げ、スクリーンで粒子を検出するとしよう。 $x'$  を通った粒子は、回析の効果を無視すれば、運動量  $p'$  の測定状態にあるわけだから、その運動量に応じた点、それを  $x''$  とするが、で検出されるはずである。さて、一方間違いだと切り捨てた最初のスリットを通ったときから古典力学で扱おうとすると、粒子はどこで検出されると予測することになるだろうか。このときも  $x'$  を通った粒子は運動量  $p'$  だというのだから、粒子は  $x''$  で検出されると結論される。量子論で扱った場合は、最初のスリットを通った時点ではいろんな範囲の運動量を持ってたと結論される。一方、古典軌道論ではその時点で運動量は  $p'$  だったと結論する。しかし、粒子検出という我々の知覚できる現象に対しては同じ結論に達するのである。そういう意味で運動量というものも定義次第だと考えるわけである。ただ古典軌道論は、回析というものが考慮されないので、回析を考慮すれば粒子検出まで量子論で扱ったほうがより現実合うはずである。

さて、今の実験を分析するにあたって重要なことを述べていると思う。 $x'$  を通った粒子の運動量はおおよそ  $p'$  とわかっていても位置については運動方向の前後の幅は全くわからない。状態は運動量と位置の確率分布で定まるのだから、状態については大雑把にしかわかっていないということである。しかし、 $x''$  で検出されるという未来が予測できるのである。だから

初期状態がそれほど正確にわからなくてもわれわれの鈍い知覚では十分役立つほどの予測はできる

のである。

## 7.7 検出までを量子力学で扱う (スピン)

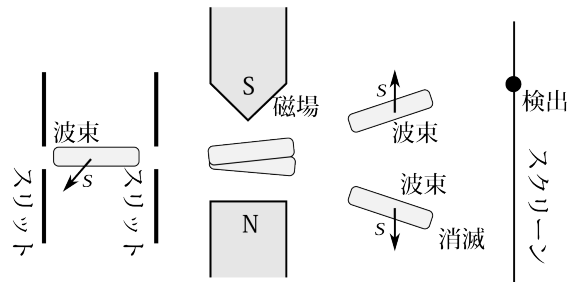


図 7.20

次にスピンを粒子検出まで量子力学の方程式で扱う。運動量のとくと同じように分析するが、状態は位置  $x$  とスピン  $s$  の2つの測定変数の確率振幅  $\psi(x, s)$  で表されるので少しややこしい。運動量のとくとの違いは測定変数が2つに別れていて、その一方を測定し、他方を推定するということである。スピン変数  $s$  は上向きと下向きの2つの測定値のみである。運動方程式は

$$i\hbar \frac{d}{dt} \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi - \frac{q}{mc} \mathbf{B} \cdot \mathbf{s} \psi$$

である。時間発展方程式がこうなる理由は付録 B で検討する。この方程式によって図 7.20 のようにスピンの上向き成分  $\psi(x, \text{上})$  は磁場によって上の方向に曲げられ、下向き成分の  $\psi(x, \text{下})$  は下の方向に曲げられる。つまり上向きの波束は古典電磁気学での上向きの角運動量を持った粒子の軌道とだいたい同じ動きをする。下向きの波束は古典電磁気学での下向きの角運動量を持った粒子の軌道とだいたい同じ動きをする。そうなることの数学的な説明は付録 C を見て欲しい。

今粒子はスクリーンの  $x'$  で検出されたとする。その位置は古典電磁気学では上向きスピンの粒子が来るべき位置であり、量子力学ではスピンの上向きの波束が来るところとする。運動量の分析をしたときのように回析を無視する場合と考慮する場合、おのおの場合について初期状態が既知の場合と未知の場合に分けて考える。

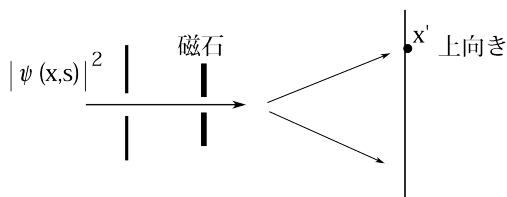


図 7.21 回析無視、初期状態  $\psi(x, s)$  既知

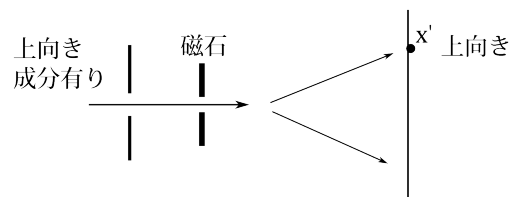


図 7.22 回析無視、初期状態  $\psi(x, s)$  未知



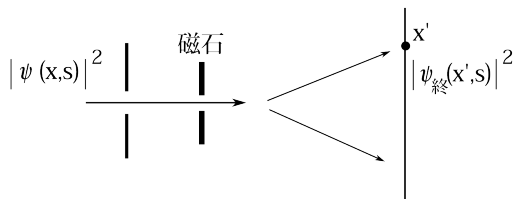


図 7.23 回析考慮、初期状態  $\psi(x, s)$  既知

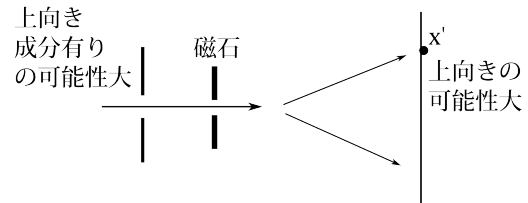


図 7.24 回析考慮、初期状態  $\psi(x, s)$  未知

### 回析無視、初期状態既知

まず、回析を無視して、スリットを通過するときの確率振幅  $\psi(x, s)$  がわかっている場合を考える。スリットでの位置  $x$  でのスピン  $s$  の確率分布は  $|\psi(x, s)|^2$  であり、運動量のとときと同様、これが測定値とも言える。スクリーンでの位置  $x'$  で検出されると、これは測定変数の一部の測定であり、1.9 節で述べたように

$$\psi_{終}(x', s)$$

に収縮すると考えられる。ここで  $\psi_{終}(x, s)$  というのはスクリーンでの粒子検出直前の確率振幅とする。以下もその意味で使う。今は回析は無いとしているので  $\psi_{終}(x', \text{下}) = 0$  である。だからスクリーンではスピンは上向きであると言える。この結果を模式的に書くと図 7.21 のようになる。もちろんスクリーンで検出されたときスピンも影響を受けるはずであり、 $\psi_{終}(x', s)$  に収縮するとは言えまい。しかしそういうことを考慮しだすと何も言えなくなってしまうので、そういうことが起きない理想的な実験をしているとしてスクリーンではスピンは上向きだとしておく。ここが運動量測定のとときの違いである。

### 回析無視、初期状態未知

次に初期状態が未知の場合を考える。初期状態が未知と言っても何らかの量子状態にあるはずであり、それが  $\psi(x, s)$  だったとする。スクリーン上の  $x'$  で検出されたとき、状態は  $\psi_{終}(x', s)$  に収束する。今は回析が無いとしているので  $\psi_{終}(x', \text{下}) = 0$  である。だからスクリーンではスピンは上向きだと言える。 $x'$  で検出されたという事実から、初期状態では上向きの成分が 0 ではなかったとは言える。つまり  $\psi(x, \text{上})$  がすべての  $x$  で 0 と言うことはなかったとは言える。もし 0 だったら回析は無いとしているのだから  $x'$  で検出されることはないからである。この結果を模式的に書くと図 7.22 のようになる。

### 回析考慮、初期状態既知

さて、これからは回析を考慮に入れる。このときもスリットでの位置  $x$  でのスピンの確率分布は  $|\psi(x, s)|^2$  であることは回析を無視した場合と同じである。スクリーンでは  $\psi_{終}(x', s)$  に収縮するのは同じだが、回析によりスピン下向きの成分が来たのかもしれない。だからスピンの上向きとは断定できない。単にスクリーン上ではスピンの確率分布は  $|\psi_{終}(x', s)|^2$  だとしか言えない。尚、これは規格化されていない確率分布である。この結果を模式的に書くと図 7.23 のようになる。

### 回析考慮、初期状態未知

次に初期状態が未知の場合を考える。この状況こそ——初期状態がわかっているならスピンを測定する必要はないのだから——スピンを測定したい状況なのである。この場合もスクリーン上でのスピンは上向きだ

とは言えない。初期状態でスピンの完全に下向きに偏っていたもの、つまり上向き成分が無いものが回析によって  $x'$  に来たのかもしれないからである。しかし初期状態がそういうふうには偏っているという情報がないなら——初期状態未知というのはそういう情報がないということであろう——そして回析の割合が小さいように装置が設定してあるなら（通常はしてあると思う）、スピンの上向きの可能性が大きいとは言える。スリット通過時については、同じ理由で、スピンの上向き成分を、大きさはわからないが、持っていた可能性が大きいとは言える。ただ完全に下向きに偏っていたものでも  $x'$  に来る可能性はあるので断定はできない。この結果を模式的に書くと図 7.24 のようになる。

### 結論

以上の分析結果を以下の表にまとめた。運動量との違いは、測定変数が 2 つに分かれていて、位置を測定してもスピンは影響を受けないことである。これは 2 粒子系の場合にも似たような考え方ができ、一方の粒子を測定したことにより、もう一方の粒子の確率振幅は選択され測定される。

状況	スリットでのスピン	スクリーンで検出後のスピン
回析無視、初期状態 $\psi(x, s)$ 既知	$ \psi(x, s) ^2$	上向き
回析無視、初期状態 $\psi(x, s)$ 未知	上向き成分が 0 ではない	上向き
回析考慮、初期状態 $\psi(x, s)$ 既知	$ \psi(x, s) ^2$	$ \psi(x', s) ^2$
回析考慮、初期状態 $\psi(x, s)$ 未知	上向き成分が 0 ではない可能性大	上向きの可能性大
古典軌道論	上向き	上向き

表の最後の段には古典軌道論（スリット通過時から粒子は古典力学に従うとして扱うこと）の結果も加えた。軌道を量子力学的に扱った測定結果というのは、回析を考慮して、初期状態が未知の場合の下から 2 段目のものである。スリットでのスピンは古典軌道を通ると考えた場合は上向きと結論され、粒子検出までを量子力学の時間発展方程式で扱った場合は、せいぜい上向きスピンの確率振幅が 0 でない可能性が大きいとしか言えない。正しいのはもちろん量子力学的に考えた場合であるが、量子論では角運動量の定義が明確でないのでスリットでの角運動量についてああだこうだ言ってもしょうがないと思う。それより何が起きるか、どこで粒子が検出されるかが大事なことだと思う。

今、ここを通過する粒子のスピンを測ってくれといわれても測ることはできない

としか言いようがない。

### 考察

スリット通過時での、この古典軌道論と量子論での結論の違いについてももう少し突っ込んで考えよう。そのためにこの粒子と相互作用している外部の粒子を含めた確率振幅と言うものを考えよう\*1。外部というのは今の場合で言えば、磁石を構成している粒子であったり、スリットを構成している粒子であったり、スクリーン

\*1 このことは運動量のときも少し言及したが、スピンの場合、測定変数が位置とスピンに分かれていて話が進めやすいのである。

を構成している粒子であったりする。確率振幅は粒子検出の直前は

$$\psi(x, s, x_{\text{外}}, s_{\text{外}})$$

であったとする。ここで、 $x_{\text{外}}, s_{\text{外}}$  は外部粒子の位置とスピンをまとめて書いた変数である。そして粒子が  $x'$  で検出されたことにより、

$$\psi(x', s, x_{\text{外}}, s_{\text{外}})$$

という確率振幅に収縮することになる。これを、外部粒子の確率振幅と考えると、検出前には  $x \neq x'$  の場合の確率振幅もあったのに、その中からこの確率振幅が選択されたということを意味する。回析が無視できる状況なら  $s = \text{下}$  のときは、この確率振幅は 0 になるので

$$\psi(x', \text{上}, x_{\text{外}}, s_{\text{外}})$$

という確率振幅が選択されたと考えていいだろう。事実としてはただこれだけの話であるが、このスピンの上向きが選択されたということから何か言えないか考えてみよう。

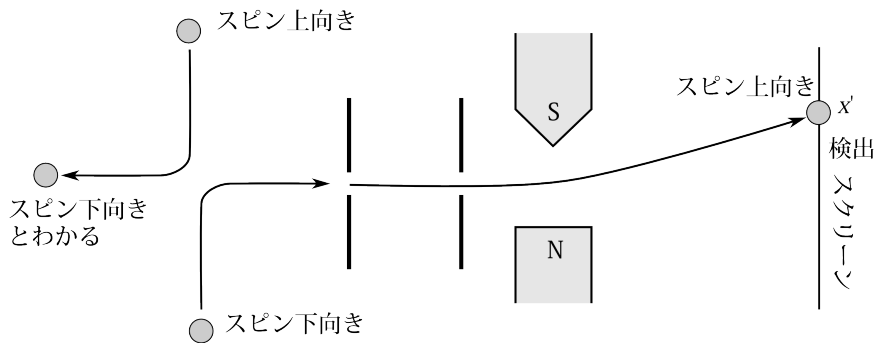


図 7.25 2つの粒子のスピンの和が 0 である粒子を衝突させる。一方の粒子はスリットを通過して磁場で曲げられてスクリーンで検出される。 $x'$  で検出されれば、もう一方の粒子のスピンは衝突後に下向きのはずだと結論できる。

今、図 7.25 のように、スピンが上向きの粒子と下向きの粒子を衝突させたとしよう。衝突後、一方の粒子を、今の実験のようにスリットを通して磁場で曲げてスクリーンの位置  $x'$  で検出したとする。衝突前は

$$\psi(x_1, s_1, x_2, s_2)$$

という確率振幅であったとしよう。 $s_1 = \text{下}$ 、かつ  $s_2 = \text{上}$  のときのみ 0 でないということなのだから、合計のスピンの和が 0 のときのみ確率振幅は 0 でない。衝突後にどうなるかは——もちろん断定はできないが——古典力学の類推からすると、スピンの合計が 0 のときのみ確率振幅が 0 でないとも考えるのもそれなりの合理的な推論である。それが成り立つとして話を進めよう。スリットに向かった粒子は、衝突後はおそらく上成分も下成分も持つようになったであろうが、 $x'$  で検出されたということは——回析を無視すれば——下成分は消えて上成分のみになったということである。数式で書くと粒子が検出される直前の確率振幅が

$$\psi(x_1, s_1, x_2, s_2)$$

だったとすると、これは粒子検出によって

$$\psi(x', s_1, x_2, s_2)$$

に収縮し、これは  $s_1 = \text{上}$  のときのみ 0 でないのだから

$$\psi(x', \text{上}, x_2, s_2)$$

に収縮するということである。衝突後もスピン変数の和は 0 のときのみ確率振幅も 0 でないというのだから、 $s_2 = \text{下}$  のときのみ、この確率振幅は 0 でないということになる。つまり、もう一方の粒子のスピンは下向きだと予測できるのである。一方古典軌道論の考えによれば、 $x'$  で検出されたということはスリット通過時にスピンは上向き、つまり衝突後に上向きだと考えるわけだから、もう一方の粒子は下向きだと考えることになる。結局、軌道を古典力学で扱おうと量子論で扱おうと、もう一方の粒子のスピンに対する結論は同じなのである。そう考えれば、古典軌道論の考えで、 $x'$  で検出されたなら、スリット通過時にスピンは上向きだったという推測もあながちおかしい推測ではない。ただ、今は衝突前の二つの粒子のスピンの状態（少なくともスピンの合計が 0 だということ）がわかっているという場合であり、初期状態がわからない粒子がスリットを通過したのとは状況が違うことには注意すべきである。又、古典軌道論では回析の効果を全く考慮に入れることができないことも注意すべきである。

#### 多くの粒子で実験する場合の初期状態の推測

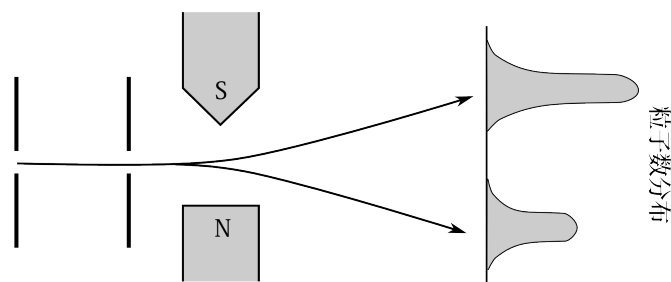


図 7.26 全く同じ状況にある膨大な粒子を不均一磁場を通してスクリーンで検出する。上に行く粒子と下に行く粒子の比が 2 : 1 だったとしたら、次に来る 1 個の粒子のスピンに関する確率分布は上向きと下向きの比が 2 : 1 と考えていいのではないだろうか。

運動量のときに考えたことをスピンでも考えよう。同じようなことなので簡潔に述べる。今は粒子が 1 つだけスクリーンで検出した場合を考えだが、我々の知りうる限り全く同じ状況で膨大な数の粒子がスクリーンに来た場合はどうか。例えば図 7.26 のように、スクリーンの上と下に来る粒子数比が 2:1 だったとしたら、次に来る粒子のスリットでの状態は上と下の比がこの 2:1 の確率分布を持ったものだろうと予想できる。この場合も初期状態が推測できるのである。

#### スピンの測定状態を作ることができること

又、図 7.27 のように、スクリーンの  $x'$  に穴を開けて、粒子を通せば、その状態は——回析が無視できるなら——スピン上向きの測定状態であろう。このようにスピンに関しても測定状態は作ることができる。

#### 古典軌道論と量子軌道論での予測

運動量のときはこの測定状態にある粒子をさらに電場で分離して古典軌道論と量子軌道論の予測が一致することをのべた。スピンの場合も図 7.27 のように、上向きに偏った粒子を、例えば紙面の側に  $\theta$  傾けた不均一

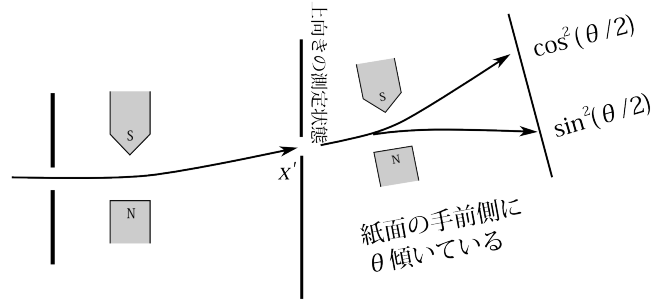


図 7.27  $x'$  を通った粒子はスピン上向きの測定状態になる。

磁場の中を通して分離するということが考えられる。波束の運動が量子力学に従うと考えれば上に行く粒子の割合は  $\cos^2(\theta/2)$  になるだろう (3.1 節参照)。古典力学に従うと考えると、上下 2 つにくっきりと分離することはなく、連続的に分離すると考えられる。ここらへんは運動量の場合と異なり、古典軌道論と量子軌道論で予測が異なる。これはスピンの連続的な値しか取れないことによる特性だろう。

さて、ここでも量子力学は上下に分離する粒子の割合を正確に予測できるということに注意すべきである。 $x'$  を通った粒子のスピンに関する状態はわかっている位置や運動量に関してはほとんど何もわかっていないにも関わらずである。このように膨大な数の粒子に対しては量子力学は正確な予測ができるのである。

## 7.8 まとめ

この章で述べたことを大雑把にまとめておこう。6.1 節で述べたように測定とは原則位置を測ることである。量子力学における測定も、最終的には粒子の位置を測ることに帰着するはずである。そういうわけで、物理量ごとに分離してその位置を測ることによって、その物理量の値を導出するという方法しかない——もちろん、今まで述べてきたようにこの方法では測定になっているとはいえないのだが——のだと思う。第 9 章で述べることだが、ハイゼンベルグの顕微鏡などでも電子の位置、運動量を、電子と衝突した光子の位置を測る——ハイゼンベルグはそう扱っていないが——ことによって導出している。水素原子での電子のエネルギー準位を測る際も、放出される光子を波長ごと（運動量ごと）に分離して光子の位置を測ることによって、光子のエネルギーを導き出し、エネルギー保存則から電子のエネルギーを導き出しているわけである。実際の実験では膨大な量の光子を観測して電子のエネルギーを推定しているので 7.5 節で述べた膨大な粒子数での実験パターンである。

この章ではこの分離して位置を測るとい測定法について——運動量とスピンについて分析したが、スピンの場合は位置とスピン変数という二つの測定変数によって記述されるので、運動量の場合とは多少結論は違ったものになる——分析したわけである。通常の本では、この分離の過程で粒子は古典力学に従って運動しているとして物理量を導出している。しかしこの方法では

- [1] 回析の効果を無視している
- [2] 位置を検出するまではいろいろな値を持っていたが、位置の検出によってそれらの値は消えたということは無視している

ので正しくない。【1】については粒子は量子力学の時間発展方程式に従うのだから、古典力学の時間発展方程式に従うとした時点で正しくないのである。それがそれなりの有意義な結果を生むのは、波束の運動は、力場

の変化が波束に比して小さければ、古典力学の運動方程式に従うからである。そういうわけで、古典力学の運動方程式に従うとするのは明らかに誤りではあるが、測定においてはどこかで古典論の世界に入らなければならないのであって、全くでたらめというわけでないことにも注意すべきである。【2】については、物理量の定義の問題だと言える。スリットでの確率分布自体がその物理量と考えるのか、そうではなく、粒子検出によって波束は収縮し、過去の物理量もくつがえったのだという考えるかである。しかしながら、いずれの考えに立っても、その考えから導出される我々の知覚可能な予想は同じであることが多いと、私は思うので、単に定義の問題なのかもしれない。ここらへんはもっと考えてみる必要があると思っている。知覚可能というのは最終的には——においや音も我々は知覚できるが、物理としては——どこで粒子が検出されるかということだと思う。

## 第 8 章

# 観測問題

### 8.1 観測問題とは

この章では第 1 章で言及した観測問題について述べる。まず何が問題なのかを述べよう。量子力学の状態の時間発展はすでに述べたように、 $\psi_x$  を位置  $x$  の確率振幅として、

$$i\hbar \frac{d}{dt} \psi_x = \sum_{x'} H_{xx'} \psi_{x'} \quad (8.1)$$

という方程式で決まる。そして例えば位置を測ると位置の測定状態に飛び移る。しかしながら測定という行為も自然現象であり、なぜ (8.1) に従って時間発展しないのだろうか。一般に多粒子のハミルトニアンは、位置表示で

$$-\sum_i \frac{\hbar^2}{2m_i} \Delta_i + V(x) \quad (8.2)$$

である。測定器もはたまた人間も同じように電子や陽子などでできており、自然法則に従うはずである。だから測定器も含めた多粒子系の状態を考えれば、(8.2) のようなハミルトニアンで (8.1) に従って状態は時間発展するはずではないか。それなのに状態はいきなり位置の測定状態に飛び移るといふ。どう考えても矛盾ではないか。この疑問、矛盾が観測問題というものである。

測定器や人間も含めて (8.1) 式で記述するというのはどういうことか。もう少し考えてみよう。図 8.1 のような 2 重スリットの実験装置を考える。運動量の測定状態にある単色の電子波（位置の確率振幅のこと）がス

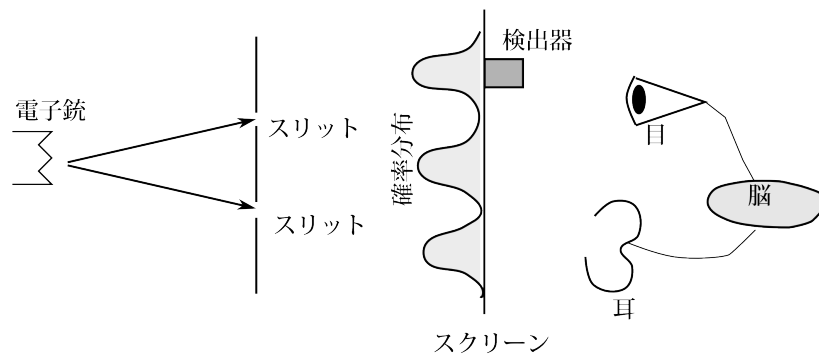


図 8.1

クリーンにやってくるでしょう。電子波は弱く、たまに電子が1個ポツリポツリと飛び出すでしょう。スクリーンに電子の検出器具があり、電子を検出すると音がなるとか、光るとかするでしょう。検出器は6.2節で述べた電子増幅管のようなものでしょう。つまり、1つの電子が検出器に入ると、その電子によって電子が飛び出て、それが加速して別の金属にあたり、数倍の電子がたたき出され、それが繰り返されるわけである。この増幅していく過程も当然多粒子の確率振幅で記述され(8.1)式に従って時間発展するはずである。そして増幅され電流が流れ、カチンと音がする。空気が振動し、耳の鼓膜を振動させ、それを電流に変換して脳に伝え、我々は音が鳴ったと気づく。この過程も確率振幅で記述され(8.1)式に従うはずである。ところでそれと同時に電子波は別の検出器にもやって来る。そして全く同じような過程で音を鳴らし、耳に伝わり脳に伝わり我々は近くする。この過程も確率振幅で記述され(8.1)式に従うはずである。しかしながら今電子波は同時に2つも検出されるようなことはないくらい弱いとしているので、我々はどこか1つの検出器の音のみ感知するはずである。つまり他の検出器から来た一連の、検出器→耳→脳と伝わってきた確率振幅は無効になってしまうのである。いったいどの地点で、この無効化(波束の収縮といってもよい)が起きるのだろうか。有名なシュレディンガーの猫もこのような疑問である。しかしながら確率振幅から実際に起きる現象というものを起こさせるためには、どこかで確率振幅をやめなければならないのである。確率振幅は確率であり実際の出来事ではない。

ここまで、あたかも電流が流れたり、鼓膜が振動することに対応する確率振幅があるかのように話をしてきた。つまり、量子力学的状態とは各物理量の確率分布のことだから、それぞれの現象に対応する確率分布があるかのように話を進めて来たわけである。しかし、このことは自明どころか、まったくの空想に近い話なのである。実際この論文では、古典力学には過程のある現象があるが、量子力学には過程のある現象などなく、だからこそどこかで古典論の世界に入らなければならないと強調してきたのである。それが今の私の考えなのだが、例えば、電流が流れるなら、その流れる向きに荷電粒子の波束が動くなどの量子力学的状態の対応も考えられなくもないとは思っている。

## 8.2 解決策を考える

そこで、この観測問題の解決法を(解決法はわからないのだが)考えてみよう。まず1つ目の案だが、仮説として

仮説 波束の収縮も(8.1)式で記述できる。つまりある測定状態に飛び移るといふ、この波束の収縮が時間発展方程式

$$i\hbar \frac{d}{dt} \psi_x = \sum_{x'} H_{xx'} \psi_{x'} \quad (8.3)$$

によって起きる

ということはないだろうか。これは最も自然で思いつきやすい考えである。しかし、2重スリットの実験などで、同じ波を扱っているのに、ある時はスクリーンのAに粒子が来たかと思えば、今度は別の地点に来たりする。それを決定論方程式でどうやって記述するのだ。式(8.3)に従った結果、波がAに収束するなら、何回やってもAに収束して、決してBに収束することはないはずだと考えるだろう。しかし、これに対しては、測定器の状態が正確にわからないからだ。測定器にはアボガドロ数程度の粒子が入っているのだから、毎回同じ実験をしているつもりでも、実際は異なる状態にあるのだと答えるのも、あながち間違えではなかろう。又は測定される側の初期状態が正確にはわからないからだというのも答えになるかもしれない。しかしながら、



この仮説もよくよく考えると無理があるのである。再び2重スリットの実験を考えよう。スクリーンにはまず図8.2のような位置の確率振幅が到達する。図8.2の波線はスクリーン上での粒子の位置の確率分布を表している。その確率振幅が——検出器やスクリーンとの相互作用のためかはわからないが——(8.3)に従った結果、ある地点B以外は消えると、この仮説は述べているのである。さて、よく知られているように(8.3)式に

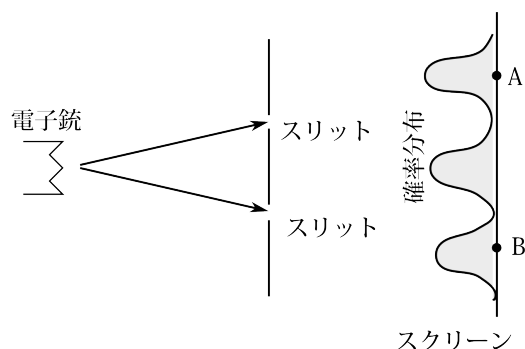


図8.2 シュレディンガー方程式に従った結果として、点Aにあった波束が点Bに向かっていくというのは考えづらい。

従う方程式では確率の流れは保存する。だからある一点で波動関数の値が1になるためにはそこに向かっての確率の流れがなければならない。その上、確率の流れは大ざっぱには古典力学に従う。いったい何故に、ある地点Aに到達した波がBへ流れていくのだろうか。ちょっと考えられないことである。

又、これはよく知らないのだが、ボームという人が提唱した隠れたパラメーターという考えがあるらしい。よく知らないものについて、ああだこうだと論ずるのとはなはだ恐縮なのだが、これはおそらく名前からして、我々の知らないパラメーターがあって、そのパラメーターがわかれば確率でなく決定論になるというものであろう。しかし注意すべきは、このパラメーターというのは人間が知覚できるのもでなければだめだということである。どのような方法によっても決して人間が知覚できないようなものは、無いのと同じである。

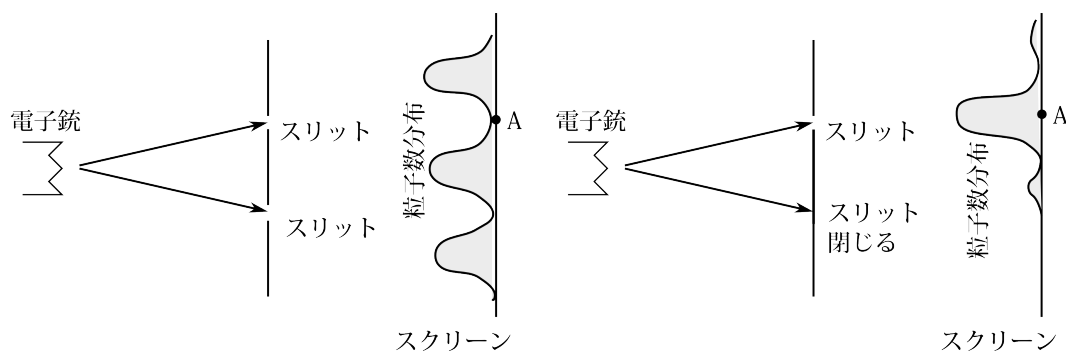


図8.3 スリットを両方開けていると、電子は点Aには来ないが、片方を閉じると来ることになる。

又、こんなことを考えるかもしれない。「粒子は古典力学に従っているのだが、初期条件の微妙な違いによってそれが異なる結果を与え、確率でしかわからないのだ。パチンコでも、同じ加減で玉をはじいても、落ちるところは大きく異なり、どこに落ちるかは確率でしかわからないではないか。」と。この考えはもちろん論外なのだが、手短な反論として2重スリットの例で考えよう。まず第1に古典力学に従ったら、干渉縞は決して

現れない。それに、もしスリット的一方を閉じたら、両方開いていたときは粒子が来ないような場所にも粒子が来るのである。図 8.3 の左図のように両方開いていると干渉によって波動関数は点 A では 0 だが、片方を閉じると図 8.3 の右図のように干渉縞が消えて、0 でなくなるのである。もし古典力学に従うなら、両方開いていても来ないのに、いわんやその一方を閉じたら、もっと来なくなってしまうだろう。

このようにいくら考えても解決策は見つからないのである。このような大きな矛盾があるからといって、量子力学のすべてが間違っているということは決してない。ただ完全ではないというだけであって、それはどんな物理理論でもそうであろう。ニュートンは遠心力の原因を示すために絶対空間なるものを誤って作り上げたからと言って、ニュートン力学がすべて間違っているわけではないのと同じようなものである。

## 第9章

# 不確定性原理

この章では不確定性原理について述べる。不確定性原理というのは量子力学の基本法則から導ける定理\*1である。それは運動量から位置への確率振幅の変換行列が  $e^{ip \cdot x/\hbar}$  であることから出てくる。ハイゼンベルグの顕微鏡の思考実験を中心に考察し、その問題点を指摘する。私は不確定性原理というものは、あまり重要ではないと思っている。一つには不確定性原理は量子力学の体系の中では一つの定理でしかないし、もう一つには、位置と運動量の定義が——特に運動量が——明確でないのに、その精度を論じてあまり意味がないと感じるのである。又、不確定性原理の証明自体にも問題があるからである。

### 9.1 不確定性定理

まず、量子力学の法則から不確定性定理を導こう。不確定性定理というのは

【不確定性定理】どんな状態でも、位置の  $x_i$  成分の確率分布がおおよそ0でないような  $x_i$  の範囲  $\Delta x_i$  と運動量  $p_i$  成分の確率分布がおおよそ0でないような  $p_i$  の範囲  $\Delta p_i$  は

$$\Delta x_i \Delta p_i > h$$

を満たす。ここで  $h$  はプランク定数。

というものである。この証明に使う量子力学の法則は、運動量から位置への確率振幅の変換行列が  $e^{ip \cdot x/\hbar}$  であるということである。そして波数  $k = 2\pi/\lambda$  の範囲  $\Delta k$  と波束の範囲  $\Delta x$  の間に  $\Delta x \Delta k > 2\pi$  の関係があるという、よく知られている数学的な事実を使う。

#### 証明

それでは、この定理を証明しよう。一般に、関数  $f(x)$  をフーリエ級数に展開した

$$f(x) = \sum_k e^{ikx} g(k)$$

では、 $f(x)$  がおおよそ0でない範囲  $\Delta x$  と、 $g(k)$  がおおよそ0でない範囲  $\Delta k$  (図9.1参照)の間で

\*1 通常「原理」というのは何か自然界で成り立つ非常に普遍的法則を述べたものを呼ぶときに使うようである。例えば、相対性原理、熱力学でのクラジウスの原理、エネルギー不変の原理などである。具体的な実験数値や数式で表されるようなもの、例えばクーロンの法則のようなものには「原理」という言葉は使わないようである。

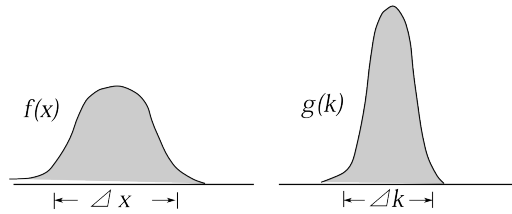


図 9.1

$$\Delta x \Delta k > 2\pi \quad (9.1)$$

が成り立つ。これは物理とは一切関係ない数学的事実である。多くの物理の教科書、主に波についての箇所記載されているのでこれが成り立つ理由は省く。

さて、この不確定性定理は何粒子であろうと何次元であろうと成り立つのだが、記号を簡素にするために、 $x, y$  の 2 次元の場合で証明する。位置  $x, y$  の確率振幅  $\psi(x, y)$  と運動量  $p_x$ 、位置  $y$  の確率振幅  $\varphi(p_x, y)$  との間の変換は

$$\psi(x, y) = a \sum_{p_x} e^{ip_x \cdot x / \hbar} \varphi(p_x, y) \quad (9.2)$$

である。ここで  $a$  は規格化定数。 $y$  を固定すれば、これは  $x$  についてフーリエ展開した式になっている。 $x$  を動かして  $\psi(x, y)$  がおよそ 0 でない  $x$  の範囲は確率分布  $P(x, y)$  がおよそ 0 でない範囲  $\Delta x$  と一致する。また  $p_x$  を動かして  $\varphi(p_x, y)$  がおよそ 0 でない  $p_x$  の範囲は確率分布  $P(p_x, y)$  がおよそ 0 でない範囲  $\Delta p_x$  と一致する。だから、(9.1) を使うと

$$\Delta x \cdot \Delta \left( \frac{p_x}{\hbar} \right) > 2\pi$$

が成り立つことになる。 $\hbar = h/2\pi$  なので

$$\Delta x \Delta p_x > h$$

が成り立つ。これが不確定性定理が成り立つ理由である。

### 補足

この定理について少し補足しよう。少し細かい話なので飛ばしてもらって差し支えない。今の場合  $y$  を固定したが、これは何でもよくこれが  $p_y$  であっても——といっても今は 2 次元としているので  $p_y$  しかないのだが——(9.2) が

$$\psi(x, p_y) = a \sum_{p_x} e^{ip_x \cdot x / \hbar} \varphi(p_x, p_y)$$

となるだけで、残りの議論はそのまま成り立つ。だから  $x$  と  $p_x$  の確率分布として  $P(x, p_y)$  と  $P(p_x, p_y)$  を採用しても不確定性定理が成り立つ。尚、 $P(x, y)$  と  $P(p_x, p_y)$  というような固定するものが  $y$  と  $p_y$  というように異なるものは物理的に意味をなさない。

又、証明では着目している測定変数以外は固定したが、和を取るという確率分布も考えられる。例えば

$$\sum_y P(x, y) \quad \sum_y P(p_x, y)$$

というのも  $x$  と  $p_x$  の確率分布になる。この場合でも不確定性定理は成り立つ。それは図 9.2 を見てもらえればわかるように、ある  $y$  を固定して  $P(x, y)$  がおよそ 0 でない  $x$  の範囲より、すべての  $y$  での  $P(x, y)$  がおよ

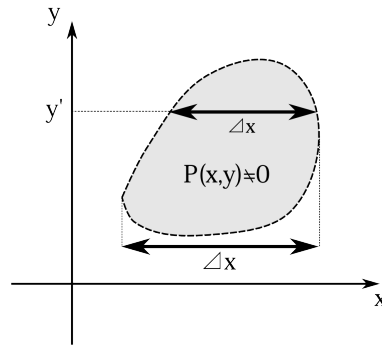


図 9.2 破線の中が確率分布  $P(x, y)$  がおよそ 0 でない範囲。  $y$  を固定したときの分布がおよそ 0 でないような  $x$  の範囲より、すべての  $y$  の範囲での、分布がおよそ 0 でないような  $x$  の範囲の方が広い。

そ 0 でない  $x$  の範囲の方が——等しいか——広くなる。となると  $\sum_y P(x, y)$  がおよそ 0 でない  $x$  の範囲は、ある  $y$  を固定して  $P(x, y)$  が 0 でない  $x$  の範囲より広くなる。実際のところは、およそ 0 でない範囲というあいまいな定義なのでこのようには断定できないが、この不確定性定理自体、およそそのことを言っているのだからこれでいいと思う。

さらに細かい話をするが、今は  $y$  で和を取ったが、これは  $p_y$  で和をとってもよい。というのは和はどの変数でとっても同じ値になるからである。つまり

$$\sum_y P(x, y) = \sum_{p_y} P(x, p_y)$$

が成り立つからである。この証明は——そんなに難しくないのですぐできるのだが——省くが、確率振幅の変換行列がユニタリーだからである。

今の不確定性定理の説明では確率分布がおよそ 0 でないという、やや曖昧な表現を使った。そうでなくより数学的正確さを持って言うと、 $x_i$  と  $p_i$  の分散  $\langle (\Delta x_i)^2 \rangle, \langle (\Delta p_i)^2 \rangle$  については\*2

$$\langle (\Delta x_i)^2 \rangle \langle (\Delta p_i)^2 \rangle \geq \frac{\hbar^2}{4}$$

が成り立つ。その証明は砂川重信の「量子力学」53 ページ。JJ 桜井の「現代の量子力学 (第 1 版)」の 47 ページに出ている。ただ何かわかったような気がしない証明ではある。

## 9.2 不確定性原理の意味

次にハイゼンベルクの言う不確定性原理について述べたい。このことについての知識は主にハイゼンベルクの書いた「量子論の物理的基礎」によっている。書かれたのは 1930 年で量子力学が出来て数年の頃である。

ハイゼンベルクの言う不確定性原理というのは不確定性定理同様

$$\Delta x \Delta p > h$$

\*2 これは

$$\langle (\Delta x_i)^2 \rangle = \sum_{\text{all}} (x_i - \langle x_i \rangle)^2 P(x_i, x_{\text{他}})$$

という意味。ここで  $x_{\text{他}}$  は  $x_i$  以外の変数であり、又、和はすべての位置変数で取っている。

という式である。式は同じなのだが、ハイゼンベルクの上記著書によると、この  $\Delta x, \Delta p$  は確率分布のおよそ 0 でない範囲ということだけでなく、 $\Delta x$  は粒子がその範囲にいるという意味で  $\Delta p$  は粒子の運動量の値がその範囲にあるという意味で使っているようである。そこが不確定性定理と少し違うところであるが、よくよく考えれば言っていることは同じである。そのことはすぐ後で述べる。

一つ大事な注意をしたい。それは、この  $\Delta x, \Delta p$  は現在の測定での範囲ということであり、決して過去の測定での範囲ではないということである。現在の測定とは、この  $\Delta x, \Delta p$  が予測できる値だということである。この「予測できる」と言われても意味がピンとこないと思うので 1 つ例を示そう。図 9.3 のように運動量のわ

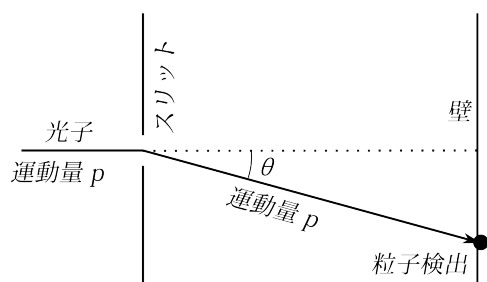


図 9.3

かっている（波長のわかっている）光子（電子でも良い）がスリットを通過して壁に当たり、位置が検出されたでしょう。光子はスリット通過しても運動量の大きさ自体は変化しないでしょう。このことは自明でも全く無いが、今は「予測できる値」の説明のために使っているので気にしないでほしい。それで光子がスリットを通過した瞬間の縦方向の位置と運動量を求め、その精度を知りたいとする。縦方向のスリット通過時の運動量は、図 9.3 にあるように、運動量の大きさを  $p$ 、角度の変化量を  $\theta$  とすると、 $p \sin \theta$  である。しかし、スリットの大きさと、検出器の大きさの分だけ誤差がある。一方スリット通過時の位置の精度はスリットの幅だが、これはスリットを小さくすればいくらかでも精度を上げることができる。また運動量の精度も粒子検出器での誤差だけになる。 $\Delta x \rightarrow 0$  で  $\Delta p$  は有限、よって  $\Delta x \Delta p \rightarrow 0$  となる。又、さらに言えば、スリットと壁の距離を広げれば  $\Delta p$  もいくらかでも小さくできる。つまり、スリットを小さくし、壁をスリットから遠ざければ  $\Delta x \rightarrow 0, \Delta p \rightarrow 0$  となる。だから不確定性原理は成り立たないということになってしまう。しかしながら、この  $\Delta x, \Delta p$  は過去の位置と運動量の精度というわけである。粒子を検出してしまった後ではもう粒子はスリットにはいないのである。予測できる値というのは、今から測定すればこの範囲にいると予測できるということである。だからハイゼンベルクの不確定性原理も、最初に述べた不確定性定理もほぼ同じ意味なのである。今現在この範囲にいることがわかっているということは、まさに実際に測れば、確率分布がその範囲に収まるということなのだから。

ただ細かいことを言えば今の説明にも問題はあるのである。これは第 7 章でも書いたが、粒子は量子力学の時間発展方程式に従って進行するのであり、古典軌道を通るわけではない。だから運動量を安易に  $p \sin \theta$  であるとも言えないし誤差についても上に書いたようには言えないと思う。ただ今は「予測できる測定」の説明の例として使っただけなので、先に進もう。

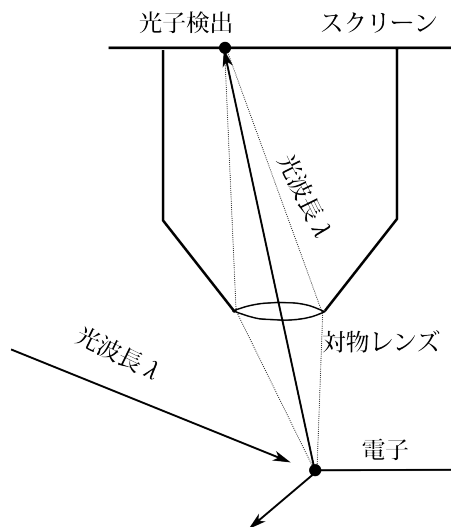


図 9.4

### 9.3 ハイゼンベルクの顕微鏡

有名なハイゼンベルクの顕微鏡の思考実験について考えよう (図 9.4)。この思考実験はハイゼンベルグの著書「量子論の物理的基礎」に出ているし、多くの量子力学の教科書に出ているものである。測定するものは電子とする。これに波長のわかっている光をあてて電子の位置をスクリーンに映そうというわけである。電子に当たった光は散乱され、その一部が対物レンズに集められ、その後何枚かのレンズを通るかして、スクリーンに集光する。実際の顕微鏡なら、接眼レンズがあり、接眼レンズ以外にも収差をなくすレンズもあろう。さらには目のレンズがあって、目の網膜に集光して像を作るのだろうが、今は話を簡単にするために、レンズは対物レンズのみとする。さて、そして光子はスクリーンで検出され、その位置は (そんなことは絶対はないのだが) 誤差なく、正確にわかったとする。今はどんなに理想的な実験をしても位置と運動量の精度の積に限度があるということを証明したいので、どんどん都合よく理想化していいのである。そのような簡略化された顕微鏡の模式図が図 9.4 である。そこで問題となるのは、「この光子のスクリーンでの位置がわかったその瞬間、電子の位置と運動量はどの程度の精度でわかるのだろうか」ということである。

#### 位置の精度

まず位置の精度  $\Delta x$  の限界だが、これはいわゆる顕微鏡の分解能になる。分解能とは、2点間を識別できる限界の距離のことであり

$$\frac{\lambda}{\sin \theta} \quad (9.3)$$

となる。こうなる理由は後で書く。ここで  $\theta$  は図 9.5 の通り、レンズの軸と電子のあるピントの合う面 (この面はレンズの軸と直角で、この面上から発せられた光はスクリーンで集光するという面) との交点から対物レンズの端を結ぶ線とレンズの軸との角のことである。 $\lambda$  は電子から散乱された光の波長。これは散乱前の波長と同じとする。本当は光は電子との衝突によって波長が変化するが (コンプトン効果)、それは話の大勢には

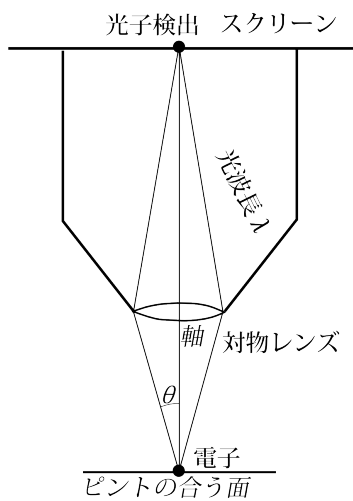


図 9.5

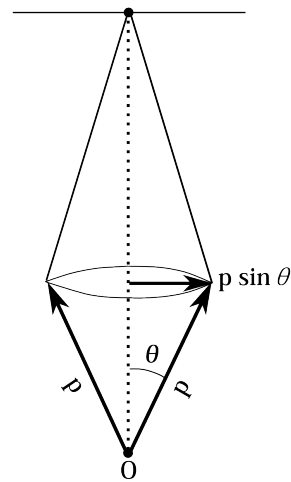


図 9.6

影響ない。結局位置の精度  $\Delta x$  の限界がこの分解能ということなので

$$\Delta x \geq \frac{\lambda}{\sin \theta} \quad (9.4)$$

となる。

### 運動量の精度

次に運動量の精度について考える。光子は電子に衝突して、対物レンズを通してスクリーンで検出されたのだが、対物レンズのどこを通ったかはわからない。衝突後の光子の運動量を  $p$  とすると、衝突後の横方向の運動量は  $-p \sin \theta$  から  $+p \sin \theta$  の範囲である (図 9.6)。今、例えば衝突前の光子と電子の運動量が完全に正確にわかっていたとしても、衝突後の光子の運動量はこれだけわからないわけだから、運動量の保存から——量子力学の世界で運動量が保存するという保証はどこにもないのだが——衝突後の電子の運動量も少なくとも、これだけはわからなくなるというわけである\*3。だから運動量のわかっている範囲  $\Delta p_x$  は

$$\Delta p_x \geq 2p \sin \theta \quad (9.5)$$

である。

さて、スクリーンで光子検出後、電子の位置のわかっている範囲は (9.4) 式と運動量のわかっている範囲 (9.5) 式より

$$\Delta x \Delta p_x \geq 2p\lambda$$

となる。 $p = h/\lambda$  なので

$$\Delta x \Delta p_x \geq 2h > h \quad (9.6)$$

となるわけである\*4。これがハイゼンベルクが言っていることだろうと、私が解釈したものである。

\*3 これはいわゆるコンプトン散乱というもので光子の散乱方向によって波長は変化する。ただ、どの方向でも運動量の大きさを同じとしても大勢には影響ないだろう。

\*4 実際は光子検出の時は、電子と光子が衝突したより後である。通常、シュレディンガー方程式に従う波束は時間とともに広がると



## 9.4 分解能

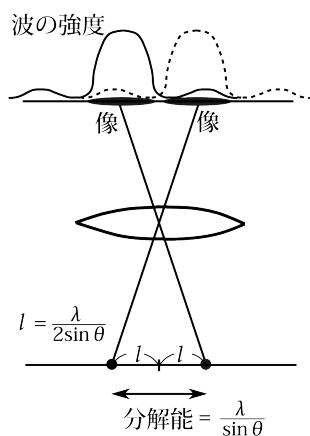


図 9.7 図の上部の線は 2 点からでた光のそれぞれの強度分布を表す。実線と破線に分けて、わかるようにしてある。強度の最初の山の範囲をその点から出た像と呼ぶことにする。この像がくっついてしまうと位置が区別できなくなる。

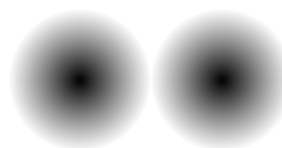


図 9.8 スクリーン上の 2 点からでた光の像。この 2 つの像がくっつかないための、測定物間の最小距離が分解能

なぜ分解能が式 (9.3) で記した  $\frac{\lambda}{\sin \theta}$  で与えられるかを書こう。光は波として進行するので、一点から出た光は、スクリーン上である程度広がりを持つ。図 9.7 にあるように、一点から出た光のスクリーン上での強度分布は、一つの高い山があり、一旦 0 になりそして小さな山と谷を繰り返す。それで一番大きな山の範囲をその点による像と呼ぼう。測定される 2 点が近いとこの像はくっついてしまって識別できない。この像が離れるために必要な 2 つの対象物体の最小距離のことを分解能という (図 9.7、図 9.8)。その距離を求めるには光路差を考えればよい。

図 9.9 のようにピントの合う面とレンズの軸との交点を点 O とする。又、レンズの端点を A、B とする (直線 AB がレンズの直径となるような端点である)。点 O から出た光はレンズに向かって広がり、スクリーンの中心 C に同位相で集光する。点 O から左へ徐々に移動させると像は右へずれていき、いずれ像の端が点 C に来る。そうなる点を O' とし、OO' の距離を l とする。図 9.7 を見ればわかることだが、2l が分解能となる。それでこの距離 l を求めよう。OA と O'A の距離を比べると、l を微小とした近似では、図 9.10 のように O'A の方が  $l \sin \theta$  だけ短くなる。一方右側に向かう経路は逆に  $l \sin \theta$  だけ O'B の方 OB より長くなる。だから点 O' から出る光の経路に関しては、右側の方が左側より、 $2l \sin \theta$  だけ長くなる。つまり

$$O'B - O'A = 2l \sin \theta$$

である。そして AC と BC の距離は等しい。だから O' から B を経由して C につく経路は O' から A を経路

考えられる。だから、電子の位置のわからなさの範囲は、 $\frac{\lambda}{\sin \theta}$  より広がる。ただ、今証明したいことは  $\Delta x \Delta p_x > h$  という不等式なのだから、 $\Delta x$  が、本文で想定したものよりさらに大きくなるというのだから、この不等式が成り立つことには変わらないわけである。

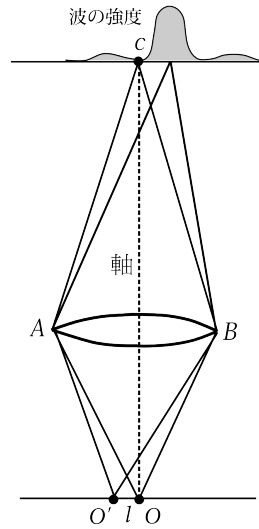


図 9.9

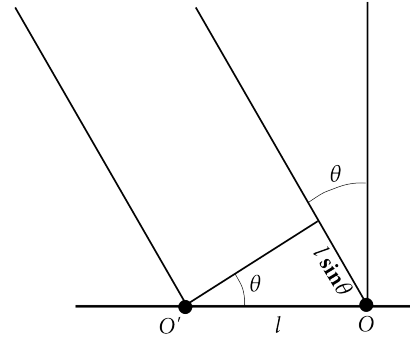


図 9.10

を經由した経路より  $2l \sin \theta$  だけ長い。つまり

$$O'BC - O'AC = 2l \sin \theta$$

である。この経路差がおよそ波長程度になると、 $O'$  からレンズを通して  $C$  に向かう様々な経路は互いに打ち消し合って、スクリーン上で波の強さが 0 になるだろう。つまり

$$2l \sin \theta = \lambda \iff l = \frac{\lambda}{2 \sin \theta}$$

ということである。最初に書いたように  $2l$  が分解能となる。つまり

$$\frac{\lambda}{\sin \theta}$$

が分解能である。今は測定物がレンズの軸の中心にある場合での話だった。レンズの軸から離れれば、この値も変わるであろうが、今は大雑把な話をしているのでこの程度でいいことにしよう。

尚、このように光路差で波の強弱の場所を求める方法が数学上どの程度の正確さがあるのかは私にはわからないが、物理では通常この方法によって実験に合う結果を得ている。

## 9.5 考察

分解能は必ずしも位置の精度とはならない

今の不確定性関係 (9.6) を導く議論を振り返るに、分解能というのを位置の精度として使っている。これは光が波であるということから推論されたものである。ところが実際は光は粒子として検出されるのである。だから実は像の広がりというのも、実際はよくよく観察すると図 9.11 右図のように多数の光子が来たことによるものなのである。今の設定では、光子が一個だけぽつんとスクリーンに来たということであった。というのはもし多数の光子が電子に衝突してスクリーンに来たというのなら、運動量の誤差がその分積み重なってしまうからである。今は誤差の最小となる限界を見出そうとして奮闘しているので、それは光子が 1 つ来たときである。光子が一つだけスクリーンに来るという状況では、分解能を単純に位置の精度とみなすわけにはいか

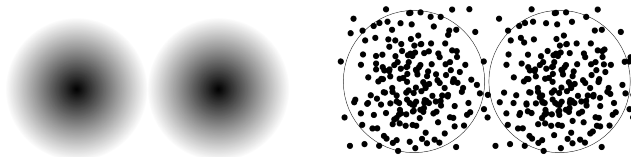


図 9.11

ない。一体全体、スクリーンに1つだけの光子が検出されたというだけでどうやって電子の位置と運動量を知るのだろうか。これは、以前荷電粒子のスピンを測定しようとして磁場で分離してスクリーンに衝突させて、その位置からスピンを見出そうとしたのと同じような状況なのである。

ハイゼンベルグは光というものを、運動量に関しては光子として扱い運動量の誤差  $2p \sin \theta$  を導き、位置については光波として扱って位置の誤差  $\lambda / \sin \theta$  を導いているのである。そうする根拠はないのである。逆に運動量に関しては光波として扱い、位置に関しては粒子と扱ってみても全くでたらめとは言えまい。運動量を光波として扱えば、電子の受け取った横方向の運動量は0であり、運動量の誤差は0となる。位置に関しては光子として扱うと、図 9.12 のように幾何光学的に考えて、光子の検出された場所から、多数の経路を逆にたど

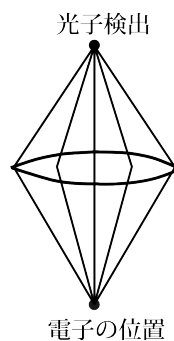


図 9.12 光子がレンズの軸上で検出されたとする。光子は図のような様々な経路を通ったはずだが、ある一点に収束する。その収束点が電子の位置であると考えれば電子の位置の誤差は0になる。

れば一点にたどり着く。その位置を電子の位置だと決めつけば、電子の位置の誤差は0になる。ハイゼンベルグの理屈が成り立つ——今述べたように成り立たないのだが——なら、今の理屈も同様に正当性があるのである。

### 光波は確率波

さて、この思考実験を量子力学的に扱ってみよう。しかし量子力学で扱えば不確定性定理より、不確定性関係が成り立つことは自明となり、身も蓋もない話になってしまうのだが、一応考えてみようというわけである。光は波として進行し粒子として検出される。当然光度の強いところで多くの光子が検出されるはずであるし、実際の実験でもそうであろう。だから、光波というのは光子の確率振幅だと（量子電磁気学でどうなのかは知らないが）考えられる。光波の強度が光子の存在確率というわけである。

これを前提として議論を進める。電子はまず光を四方八方に散乱する。対物レンズに向かう波もあれば、向かない波もある。そしてスクリーンで光子が検出され、他の場所では検出されない。これはいわゆる波束の収縮が起きたわけである。ただ光子なら、消滅することもあるので波束の消滅と言ったほうが状況を的確に表

しているかもしれない。これは測定変数が電子と光子の位置の2個の場合である。光子の位置がわかった。電子は光子の位置によって、いろいろな確率振幅を持っていたのだが、光子がある位置で検出されることによってそれに応じた確率振幅が選択される。その確率振幅では電子の位置と運動量はという問題である。数式で書くと電子の位置座標を  $r_e$ 、光子の位置座標を  $r_p$  とすると、この2つを測定変数とした確率振幅

$$\psi(r_e, r_p)$$

があり、光子の位置が  $C$  で検出されたなら、この確率振幅は

$$\psi(r_e, C)$$

に収縮するはずである。この確率振幅での電子の位置と運動量の確率分布はどうかという問題である。それは不確定性定理から  $\Delta x \Delta p > h$  を満たす。これが量子力学的説明だと思う。

### 不確定性原理証明の本質

ここで、いろいろな文献——私の知る限りだが——に登場する不確定性原理が成り立つという主張のからくりを述べたい。しかしながら、その主張しているところが明瞭でないので、そのからくりを述べると言っても難しいのだが、あくまで私の理解だと思ってもらいたい。

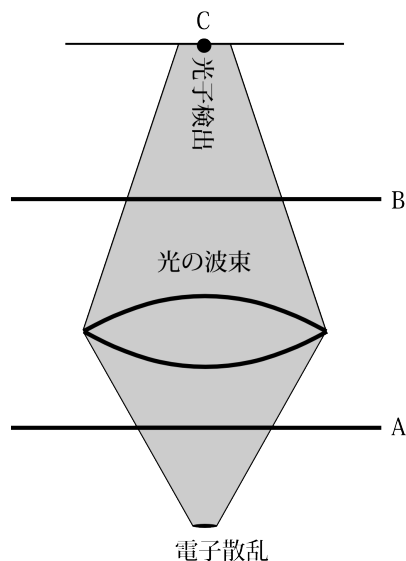


図 9.13 光の波束の直線 A 上でも B 上でも不確定性関係  $\Delta x \Delta p > h$  成り立つ。

まず、今まで述べてきたハイゼンベルグの顕微鏡についてだが、我々の知覚する現象はスクリーンでの電子から散乱された光の像——実際は光子なので点だが、今は真実を追求しているのではなく、世間で通用している話に合わせているのである——である。これから不確定性関係を導いているのであるが、光というのは、常に不確定性関係を満たしているわけである。もちろん、光波の振幅が位置の確率振幅と考え、運動量の確率振幅から、位置の確率振幅への変換行列が  $e^{ip \cdot x / \hbar}$  と言うことは前提としているのだが。だから光はスクリーンで像を作ったときも不確定性関係を満たし、時間を逆にたどれば対物レンズの場所でも、そして電子と散乱したときも不確定性関係を満たしていたわけである（図 9.13）。ところで電子と光子の衝突では運動量は保存する

としている。保存するから電子の運動量が推定できるのである。そして電子の位置というのは光と衝突した場所である。となると、電子と衝突後の光が不確定性関係を持っているなら、電子の運動量と位置の精度は光子の精度より良くなることはないわけであり、当然不確定性関係を満たすことになる。

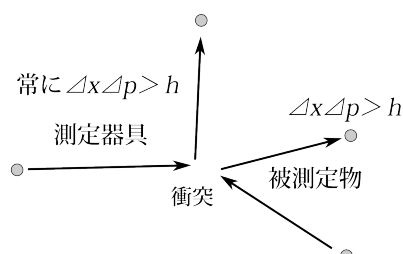


図 9.14 模式図。測定器具が不確定性関係を満たしている限り、必然的に被測定物も満たす。

今の論法を見ると、測定器具としての光が常に不確定性関係を満たしながら、被測定物の電子と衝突する。となると、光が顕微鏡の対物レンズを通ったとか、そういうことはどうでもよく、必然的に電子も不確定性関係を満たすことになる。つまり顕微鏡などというたいそうな物など必要なく、論旨というのは簡単に言えば

- 測定器具は常に不確定性関係を満たしている
- 測定のためには被測定物は測定器具と衝突しなければならない
- 衝突の際、運動量は保存し、被測定物の位置は測定器具と衝突した場所である
- よって、被測定物も不確定性関係を満たす

ということである (図 9.14)。実際のところ、私の知る限りすべての文献で、測定器具は不確定性関係を満たすということを前提としている。となると被測定物も不確定性関係を満たすのは自明になってしまうのである。これが、最初に私が不確定性原理というのはあまり意味がないと述べた大きな理由の一つである。もちろん測定器具自体の位置と運動量の精度は、測定における重要なポイントである。しかしそれを最初から不確定性関係を満たしているとしてしまっただけでは、不確定性関係の証明としてはあまり意味がないと感じるのである。簡単に言えば測定器具が不確定性関係を満たすなら、被測定物も不確定性関係を満たすということを証明しているのであり、不確定性関係は矛盾がないということなのである。測定器具が不確定性関係を満たすという根拠は位置から運動量への変換行列が  $e^{ip \cdot x/\hbar}$  だからである。思うにこの  $e^{ip \cdot x/\hbar}$  という式を使わずに不確定性関係を証明できなければ不確定性関係が成り立つという証明は意味がないと思う。

## 9.6 回析のため断定はできない

ちょっと脱線するが、今まで電子の位置の範囲についていろいろ述べたが、それは単にその範囲内に電子がある確率が高いというだけで、実はもっと広い。点 O から出た光はスクリーンで集光するが、その範囲は図 9.15 左図のような広さを持っているのである。もちろん、ピークのところに圧倒的に強い光が来る (光子が来る確率が高い) が、そこからずれたところにも弱い光が来るのである。これは光が波なので回析するからである。極端なことを言えば、光はどんなところにも回析によってやってくるのである。となると図 9.15 右図のように、O からだいたいぶずれている点 O' から散乱された光もわずかながら、O からきた光が集光する点のピークの C にも光が来るのである。我々はスクリーン上で光子を発見して、それから電子の位置を推測する。そ

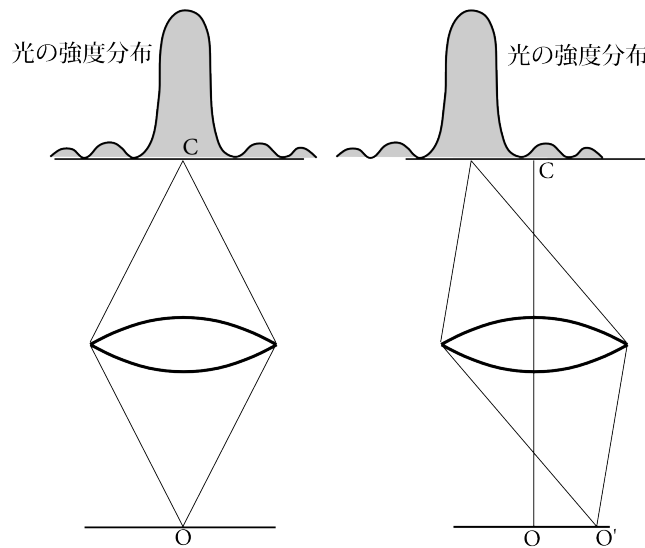


図 9.15

の推測された範囲をたとえ分解能の  $\lambda / \sin \theta$  だと考えたとしても、これは単にその範囲にいる確率が高いというだけなのであり、この範囲に 100 % 存在するとは断定できない。その範囲からずっと離れたところに電子がある可能性も決して 0 ではないのである。6.2 節で述べたような、霧箱や光電子増倍管のようなものなら、そこで粒子検出の信号があれば、その装置の中に粒子は 100 % 存在するといえそうである。しかしながら、これはやや極端な言い方だが、霧箱の中の白い線というものも、今の顕微鏡の例のように、ぜんぜん異なる場所から来た光が我々の目に入ったのかもしれないのである。この考え方をあらゆる知覚に当てはめて考えれば

我々が何かを知覚しても、それから確定的な事実とは言えない

ということになってしまうのである。

## 9.7 まとめ

不確定性定理が成り立つのは位置と運動量の確率振幅の変換行列が  $e^{ipx/\hbar}$  だからであり、それから波数と波束の広がりとの関係という数学的事実を使えば導出される。

ハイゼンベルグの顕微鏡による不確定性関係の証明の思考実験の問題点は電子の位置の測定で光を波として扱っていることである。つまり位置の精度を安易に分解能としてしまっている。実際は光は粒子として検出される。ハイゼンベルグは光を、運動量の測定には光子として、位置の測定には光波として扱っているがそうすべき理由は特にない。逆に運動量では光波、位置では光子として扱えば誤差はなくなる。

光波を光子という粒子の確率波として考え、量子力学の体系でこの顕微鏡を扱うと、光子と電子の 2 粒子系になる。光子がある点で検出されたとき、電子の波動関数はいかにという問題となる。しかし光子の検出時に波動関数が何に収縮しようと、これは不確定性定理で述べた理由から、不確定性関係が成り立つに決まっているということになる。

多くの文献での不確定性関係の説明で、測定器自体が不確定性関係を満たしていることを前提としている。測定の際は、被測定物を測定器にぶつけなければならない。測定器が不確定性関係を満たしているなら、衝突の際、それは被測定物に移るのだから被測定物が不確定性関係を満たすのは自明である。それにこれでは不確定性関係を証明しているのではなく、被測定物以外が不確定性関係を満たしているなら、その被測定物も満たさなければならないという証明にしかなっていない。アインシュタインは「不確定性関係が破られる実験装置があるのか」ということでボーアと論争したとのことである。具体的にどのような内容だったかは知らないが、ボーアが測定器具は不確定性関係を満たしているということを前提にすれば、不確定性関係が成り立つのは自明なのであり、「不確定性関係が破られる実験装置があるのか」ということに関してはほとんど意味のない論争だったのだと思う。

ハイゼンベルグの顕微鏡の思考実験を中心に不確定性原理について記述してきた。私はいくつか不確定性関係についての思考実験などを読んだが、意味があると思えるものはなかった。位置と運動量の確率振幅の変換が  $e^{ipx/\hbar}$  であると言う事実を使わずに、不確定性関係を証明できなければ意味がないと思う。変換が  $e^{ipx/\hbar}$  であることは決して自明でもない。これを使わずに不確定性関係が成り立つことを納得させてくれれば、この変換の正しさの証拠にもなる。しかしながらこのことを使わずに不確定性関係が成り立つことを示すことは無理なのではないかと思う。とにかく不確定性関係というのは位置と運動量の確率分布がわかれば正しいかどうかわかるのである。しかし、1.10 節で述べたように、その肝心の確率分布を実験的に求める方法が無いのである。

## 第 10 章

# カノニカル分布での量子状態

統計力学によれば、ある温度  $T$  にある系の量子状態はエネルギー測定状態にあり、そしてエネルギー  $\varepsilon$  の測定状態にいる確率  $P_\varepsilon$  (これは日常用語の意味での確率で、量子力学的確率ではない) は

$$P_\varepsilon = \frac{e^{-\beta\varepsilon}}{\sum_\varepsilon e^{-\beta\varepsilon}} \quad (10.1)$$

である。ここで  $\beta = 1/kT$  で、 $k$  はボルツマン定数。いわゆるカノニカル分布というものである (この章の話はもちろんマイクロカノニカル分布でも通用な話であるが、カノニカル分布での話とする)。しかしながら、系がエネルギー測定状態にいるというのはどう考えても不自然である。エネルギーを測ったわけではないのである。いったい何を持ってある温度の平衡状態にある系がエネルギー測定状態にあるといえるのだろうか。ではどういう状態にいるかという、いわゆるエネルギー測定状態の重ね合わせで、エネルギー  $\varepsilon$  である確率振幅  $\varphi_\varepsilon$  が、(10.1) の  $P_\varepsilon$  を用いて

$$\varphi_\varepsilon = \sqrt{P_\varepsilon} e^{i\delta_\varepsilon} \quad (10.2)$$

となる状態にあると考えるのが自然である。ここで  $e^{i\delta_\varepsilon}$  はエネルギー  $\varepsilon$  ごとに異なる不定の位相因子で  $\delta_\varepsilon$  は実数である。この状態でエネルギーを測定すればそれが  $\varepsilon$  である確率は  $P_\varepsilon$  になってくれる。あとの理論展開は通常の統計力学と全く同様に行くと思うのだがどうだろうか。私は長い間統計力学を勉強していないので詳しく書けないのが残念なのだが。

### 思考実験

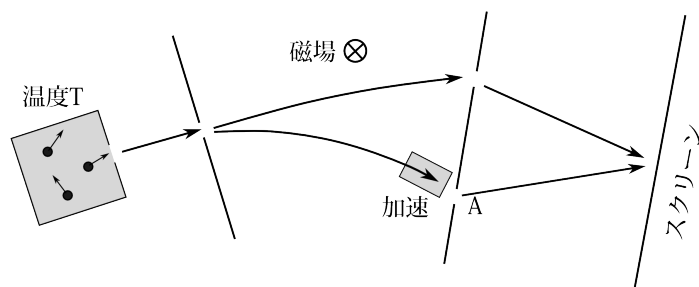


図 10.1

この (10.2) が正しいのかどうかを試す思考実験がある。図 10.1 のようにイオン気体の入った箱に穴をあけて分子が飛び出るようにする。シャッターなどを用いて同時に複数の粒子が飛び出ないようにする。その粒子



を速度によって分離できるようにする。例えば磁場をかけるなどする。遅い方の軌道は電場などで加速させて、もう一方の軌道の速さと等しくなるようにさせて、スリット A を通るようにさせる。このときスクリーンに干渉縞ができるかどうかというのが問題である。もし通常の量子統計力学の解釈なら、粒子はどれかのエネルギー測定状態にあり、どの測定状態にいるかは我々は知らないだけであり、波動関数は磁場で分離しない。そして干渉縞は現れない。しかし量子状態が (10.2) で表されるなら、干渉縞が現れるはずである。同じような実験がスピンでもできそうである。

## 付録 A

# スピン演算子

この付録ではスピン演算子というものを導入し、その  $z$  方向表示を求める。スピン演算子はこの論文での必要性はたいしてないのだが、私自身の興味もあってここに記すことにした。

ある方向  $n$  のスピン演算子  $S^n$  とは、その  $n$  方向の表示で

$$S_{n'n}^n \equiv \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

となる演算子のことである。このように定義した理由を簡単に述べると、これは第 4 章で述べた、軌道グループでの演算子の定義——そこではスピンに関しては演算子は定義していなかった——の仕方をスピンにも適用しようということである。第 4 章の命題 4.2 で述べたように、ある物理量の演算子はその物理量の表示（基底がその物理量の測定状態）で対角成分がその測定値となる対角行列なのであった。別の言い方をすると、測定状態がその演算子の固有状態で、かつ固有値が測定値となる行列のことであった。実際  $n$  方向の測定状態は  $n$  方向表示で

$$k(n; n+) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad k(n; n-) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

だが、

$$\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となって、測定状態がこの演算子の固有状態になって、固有値が測定値  $\hbar/2, -\hbar/2$  になっている。この結果、 $n$  方向のスピンの平均値は

$$\psi^\dagger S^n \psi$$

を計算すればよいし（第 5 章、命題 5.1）、その平均値  $\langle S^n \rangle$  の時間発展は

$$\frac{d\langle S^n \rangle}{dt} = \psi^\dagger \frac{[S^n, H]}{i\hbar} \psi$$

に従うことになる（第 5 章、命題 5.2）。

さて、話を本題に戻そう。 $n$  方向のスピン演算子の  $z$  方向表示は

$$S_{z'z}^n = \sum_{n,n'} U_{zn'} S_{n'n}^n U_{zn}^*$$

を計算すれば求まる\*1。これを使って  $z$  方向、 $x$  方向、 $y$  方向のスピン演算子  $S^z$ 、 $S^x$ 、 $S^y$  の  $z$  方向表示を求めよう。 $S^z$  の  $z$  方向表示  $S_{z'z}^z$  は、定義のまま

$$S_{z'z}^z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

である。 $S^x$  の  $z$  方向表示  $S_{z'z}^x$  は

$$S_{z'z}^x = \sum_{x,x'} U_{zx'} S_{x'x}^x U_{zx}^*$$

を計算すればよい。 $U_{zx}$  は第3章で導いた (式 (3.8) 参照)

$$U_{zx} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

なので

$$\begin{aligned} S_{z'z}^x &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\hbar}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。同様に  $S_{z'z}^y$  は

$$S_{z'z}^y = \sum_{y,y'} U_{zy'} S_{y'y}^y U_{zy}^*$$

を計算すればよい。 $U_{zy}$  は第3章で導いた (式 (3.17) 参照)

$$U_{zy} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$$

なので、

$$\begin{aligned} S_{z'z}^y &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \cdot \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \\ &= \frac{\hbar}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -1 & -i \end{pmatrix} \\ &= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

\*1 勘違いすることはないと思うが一応注意しておく、ここで  $n$  について和を取っているが、それは  $S_{n'n}^n$  の下添字のみである。上添字の  $n$  は固定されており和には関係ない。以後も同様。

となる。また、 $n$  方向（極座標で  $\theta, \phi$ ）のスピン演算子  $S^n$  はの  $z$  方向表示は

$$S_{z'z}^n = \sum_{n,n'} U_{zn'} S_{n'n}^n U_{zn}^*$$

を計算すればよい。 $U_{zn}$  は第 3 章で導いた（式 (3.11) 参照）

$$U_{zn} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & \sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2)e^{i\phi} & -\cos(\theta/2)e^{i\phi} \end{pmatrix}$$

なので

$$\begin{aligned} S_{z'z}^n &= \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & \sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2)e^{i\phi} & -\cos(\theta/2)e^{i\phi} \end{pmatrix} \cdot \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & \sin(\theta/2)e^{-i\phi} \\ \sin(\theta/2) & -\cos(\theta/2)e^{-i\phi} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & \sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2)e^{i\phi} & -\cos(\theta/2)e^{i\phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & \sin(\theta/2)e^{-i\phi} \\ -\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2)e^{-i\phi} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \cdot e^{-i\phi} \\ \sin \theta \cdot e^{i\phi} & -\cos \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。これは

$$\begin{aligned} S_{z'z}^n &= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sin \theta \cos \phi + \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \sin \theta \sin \phi + \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cos \theta \\ &= n_x S_{z'z}^x + n_y S_{z'z}^y + n_z S_{z'z}^z \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

と変形できる。ここで  $n_x, n_y, n_z$  は  $n$  方向の各  $x, y, z$  軸への方向余弦。まるで  $S^n$  が空間ベクトルのようになっている。まとめると

各軸のスピン演算子の  $z$  方向表示は

$$S_{z'z}^x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad S_{z'z}^y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad S_{z'z}^z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

であり、任意の方向  $n$ 、極座標で  $\theta, \phi$  方向のスピン演算子  $S^n$  の  $z$  方向表示は

$$S_{z'z}^n = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \cdot e^{-i\phi} \\ \sin \theta \cdot e^{i\phi} & -\cos \theta \end{pmatrix} = n_x S_{z'z}^x + n_y S_{z'z}^y + n_z S_{z'z}^z \quad (\text{A.2})$$

である。

## 付録 B

# 磁場中のスピンハミルトニアン

磁場の中にあるスピンをもつ電荷  $q$  の粒子のハミルトニアンは、

$$-\frac{q}{mc} \mathbf{S} \cdot \mathbf{B}$$

であることが知られているが、この付録ではこのスピンハミルトニアンについて考察する。まず一様な磁場の場合、ある仮定のもとでこのスピンハミルトニアンを導く。次に任意の磁場について考察する。

### 一様な磁場

今、一様な磁場の中にあるスピン  $1/2$ 、電荷  $q$  の粒子を考えよう。一様な磁場とは場所と時間によらず一定という意味である。磁場は  $n$  方向を向いており、大きさは  $B$  だとしよう。その粒子の、粒子の軌道グループ（スピン以外の測定変数のこと）に関しては位置  $\mathbf{x}$  表示で、スピンに関して  $z$  方向表示のハミルトニアンを求めたい。ある表示のハミルトニアンは、エネルギー表示からその表示への変換行列を  $U$ 、エネルギー測定値  $\varepsilon$  だとすると、 $U \varepsilon U^\dagger$  であるので（1.8 節参照）、エネルギー測定値  $\varepsilon$  と変換行列  $U$  がわかればよい。そこで以下のことを仮定しよう。

【仮定 1】エネルギー測定値；エネルギー測定値  $\varepsilon$  は、軌道グループの測定値  $\varepsilon_k$  と、スピングループの測定値  $\varepsilon_s$  に分かれる。つまり

$$\varepsilon = \varepsilon_k + \varepsilon_s$$

となる。 $\varepsilon_k$  は軌道グループのハミルトニアン

$$\frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{i=3} \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{q}{c} A_i \right)^2 \quad (\text{B.1})$$

の固有値とする。スピングループに関しては

$$\varepsilon_s = \begin{cases} \varepsilon_+ = -\frac{q}{mc} B \left( \frac{\hbar}{2} \right) \\ \varepsilon_- = -\frac{q}{mc} B \left( -\frac{\hbar}{2} \right) \end{cases}$$

とする。

【仮定 2】変換行列；エネルギー表示から位置  $\mathbf{x}$ 、スピン  $z$  方向表示への変換行列は

$$U = U(\mathbf{x}, \varepsilon_k) \cdot U_{zn}$$

とする。ここで  $U(\mathbf{x}, \varepsilon_k)$  は軌道グループのハミルトニアン (B.1) の固有値  $\varepsilon_{\mathbf{x}}$  のときの固有関数  $k(\mathbf{x}; \varepsilon_k)$  である。 $U_{zn}$  は磁場が向いている方向  $n$  から  $z$  方向表示への変換行列である。これは  $n$  方向状態の  $z$  方向表示である  $k(z; n)$  のことでもある。成分の対応は、 $U_{z+,n+}$  はエネルギー  $\varepsilon_+$  から  $z+$  成分への、 $U_{z+,n-}$  はエネルギー  $\varepsilon_-$  から  $z+$  成分への変換行列とする。 $z-$  についても同様。

なぜこのように仮定した (3.4 節でこの仮定はすでに使ったが) かということについて簡単に述べるが、大雑把に言うと、この系でのエネルギー測定状態というのは、軌道グループについては (B.1) の固有ベクトルに対応する状態で、スピンのに関しては、エネルギーが  $\varepsilon_+$  のときは、スピンの磁場の方向に向いている  $n+$  の状態で、エネルギーが  $\varepsilon_-$  のときはスピンの磁場の逆に向いている  $n-$  の状態だということである。イメージとしてはこういうことだが、この論文の理屈に沿った言い方をすると、状態とはすべての物理量での確率分布のことであったのだから、系のエネルギー  $\varepsilon$  の測定状態での任意の物理量の確率分布は、軌道グループのエネルギー測定状態での確率分布  $|k(\mathbf{x}; \varepsilon_k)|^2$  と、スピンの  $n+$  方向かその逆向き  $n-$  の状態での確率分布  $|k(z; n)|^2$  の積になるということである。例えば、エネルギー  $\varepsilon$  の測定状態での、軌道グループでは位置  $\mathbf{x}$ 、スピングループでは  $z$  方向の確率分布  $P(\mathbf{x}, z; \varepsilon)$  は

$$P(\mathbf{x}, z; \varepsilon) = |k(\mathbf{x}; \varepsilon_k)|^2 \cdot |k(z; n)|^2$$

と積の形になるということである。これは磁場が一様であればスピンエネルギーは位置に全く関係ないのだから軌道グループとスピングループの確率が全く独立ということである。遠く離れた 2 つの粒子の状態がこのように掛け算になるのと同じことである。その結果 (もう少し綿密な議論は必要だが、そこは省いて) 確率振幅もそれぞれのグループの確率分布に対応したものの積になる。だから、エネルギー  $\varepsilon$  の測定状態での、位置  $\mathbf{x}$ 、スピン  $z$  方向表示の確率振幅  $k(\mathbf{x}, z; \varepsilon)$  は

$$k(\mathbf{x}, z; \varepsilon) = k(\mathbf{x}; \varepsilon_k) \cdot k(z; n)$$

というようになるわけである。変換行列はその測定状態を変換先の確率振幅で表したものであった (第 1 章、命題 1.2) のだから、これが変換行列になるというわけである。

さて、長々と【仮定 1】と【仮定 2】の根拠を述べてきたが、とにかくこの仮定を使って位置  $\mathbf{x}$ 、スピン  $z$  方向表示のハミルトニアンを求めてみよう。ハミルトニアンは  $U\varepsilon U^\dagger$  を計算すればよく、今の記号では

$$\sum_{\varepsilon_k, \varepsilon_s} \left[ U(\mathbf{x}', \varepsilon_k) U_{z'n} \right] (\varepsilon_k + \varepsilon_s) \left[ U^*(\mathbf{x}, \varepsilon_k) U_{zn}^* \right]$$

を計算すればよい。これを展開すると

$$\left[ \sum_{\varepsilon_k} U(\mathbf{x}', \varepsilon_k) \cdot \varepsilon_k \cdot U^*(\mathbf{x}, \varepsilon_k) \right] \cdot \left[ \sum_{\varepsilon_s} U_{z'n} U_{zn}^* \right] + \left[ \sum_{\varepsilon_k} U(\mathbf{x}', \varepsilon_k) U^*(\mathbf{x}, \varepsilon_k) \right] \cdot \left[ \sum_{\varepsilon_s} U_{z'n} \cdot \varepsilon_s \cdot U_{zn}^* \right]$$

となる。それぞれの項だが、まず最初の項は第 4 章の命題 4.1 で述べたように、

$$\sum_{\varepsilon_k} U(\mathbf{x}', \varepsilon_k) \cdot \varepsilon_k \cdot U^*(\mathbf{x}, \varepsilon_k) = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{i=3} \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{q}{c} A_i \right)^2$$

となる。また 2 番目の項は、変換行列がユニタリーなので

$$\sum_{\varepsilon_s} U_{z'n} U_{zn}^* = \delta_{z'z}$$

となる。3番目の項もユニタリーであることから

$$\sum_{\varepsilon_k} U(\mathbf{x}', \varepsilon_k) U^*(\mathbf{x}, \varepsilon_k) = \delta_{\mathbf{x}'\mathbf{x}}$$

となる。今、興味あるのは最後の項の

$$\sum_{\varepsilon_s} U_{z'n} \cdot \varepsilon_s \cdot U_{zn}^* \quad (\text{B.2})$$

である。この  $\varepsilon_s$  というのはスピンの  $n+$  状態のときは  $\varepsilon_+$  で、 $n-$  状態のときは  $\varepsilon_-$  なのだから、行列で表すと

$$\varepsilon_s = -\frac{qB}{mc} \cdot \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

だということである。この

$$\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

は、付録 A で述べた  $n$  方向のスピンの演算子の  $n$  方向表示  $S_{n'n}^n$  に他ならない。これを使うと

$$\varepsilon_s = -\frac{qB}{mc} \cdot S_{n'n}^n$$

である。さて、式 (B.2) はこのスピンの演算子を  $z$  方向表示に変えているわけであり、

$$\sum_{\varepsilon_s} U_{z'n} \cdot \varepsilon_s \cdot U_{zn}^* = -\frac{qB}{mc} \cdot S_{z'z}^n$$

である。そして、付録 A の (A.1) で述べたように、

$$S_{z'z}^n = n_x S_{z'z}^x + n_y S_{z'z}^y + n_z S_{z'z}^z$$

であった。ここで  $n_x, n_y, n_z$  は方向  $n$  の単位ベクトルの  $x, y, z$  成分。だから

$$\sum_{\varepsilon_s} U_{z'n} \cdot \varepsilon_s \cdot U_{zn}^* = -\frac{q}{mc} \cdot (B_x S_{z'z}^x + B_y S_{z'z}^y + B_z S_{z'z}^z)$$

である。ここで  $B_x, B_y, B_z$  は磁場の  $x, y, z$  成分。又は簡潔に

$$-\frac{q}{mc} \mathbf{B} \cdot \mathbf{S}_{z'z}$$

と書いてもよい。ここで  $\mathbf{S}_{z'z} = (S_{z'z}^x, S_{z'z}^y, S_{z'z}^z)$  のこと。結局、位置  $\mathbf{x}$ 、スピン  $z$  方向表示のハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{i=3} \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{q}{c} A_i \right)^2 \cdot \delta_{z'z} - \delta_{\mathbf{x}'\mathbf{x}} \cdot \frac{q}{mc} \mathbf{B} \cdot \mathbf{S}_{z'z}$$

となる。通常は  $\delta_{z'z}, \delta_{\mathbf{x}'\mathbf{x}}$  は省くので

$$H = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{i=3} \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{q}{c} A_i \right)^2 - \frac{q}{mc} \mathbf{B} \cdot \mathbf{S}_{z'z} \quad (\text{B.3})$$

となる。

ここではハミルトニアンをスピン演算子などという大層なものを持ち出して書き下したが、そんなものを持ち出さなくても (B.2) を  $z$  方向表示にすれば単に、磁場の向きの極座標を  $\theta, \phi$  として、

$$\sum_{\varepsilon_s} U_{z'n} \cdot \varepsilon_s \cdot U_{zn}^* = -\frac{qB\hbar}{2mc} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \cdot e^{-i\phi} \\ \sin\theta \cdot e^{i\phi} & -\cos\theta \end{pmatrix} = -\frac{q\hbar}{2mc} \begin{pmatrix} B_z & B_x - iB_y \\ B_x + iB_y & -B_z \end{pmatrix}$$

と変換されるだけの話である (付録 A、式 (A.2) 参照)。ではスピン演算子などという大きなものを持ち出す意味が全くないかと言うとそうではないと思う。古典電磁気学によると磁気モーメント  $\boldsymbol{\mu}$  のエネルギーは

$$-\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$$

である。そして磁気モーメントは角運動量  $\mathbf{s}$  に比例する。その比例定数を  $q/mc$  だとすれば、つまり  $\boldsymbol{\mu} = -\frac{q}{mc}\mathbf{s}$  とすれば、エネルギーは

$$-\frac{q}{mc}\mathbf{s} \cdot \mathbf{B}$$

となる。この  $\mathbf{s}$  をスピン演算子に置き換えるとスピンハミルトニアンが得られる。これは第 4 章で、物理量を演算子に置き換えた手法と同じになっている。そしてスピンの平均値  $\langle \mathbf{S} \rangle$  の時間発展なども

$$\frac{d\langle \mathbf{S} \rangle}{dt} = \psi^\dagger \frac{[\mathbf{S}, H]}{i\hbar} \psi$$

を計算すればよく、ハミルトニアンを物理量に対応した演算子で書くことは便利ではある。

#### 磁場が一様でない場合

磁場が場所によって変化する場合はどうか。このハミルトニアンを導出したときに使った仮定を振り返るに、【仮定 1】については、つまりエネルギー測定値が  $\varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_s$  とそれぞれの測定値の和になることについてだが、磁場が場所によって大きさを変えれば、スピンエネルギーも場所によって変わるであろう。となると全体のエネルギーがある一定の値になるためには、軌道グループのエネルギーが場所によって変わらなければならない。というわけで、【仮定 1】は成り立たなくなる。【仮定 2】については、つまり変換行列が  $U(\mathbf{x}, \varepsilon_k)U_{zn}$  となることについてだが、磁場が場所ごとに向きを変えれば明らかに成り立たない。では磁場が一様でない場合はハミルトニアンは (B.3) のようにはならないのかといえば、それは私には何も言えないが、このハミルトニアンが正しいということにはなっている。上に述べたような、角運動量の項をスピン演算子に置き換えればこのハミルトニアンになってくれているというのも正しさの根拠にはなるであろう。というのは、軌道グループではこの手法が不思議とうまくいっているからである。しかしそんな根拠のあやふやな議論よりもこの式が現象に合っているのかどうかである。そのことがこのハミルトニアンが正しいかどうかを決めるのである。



## 付録 C

# スピン磁気モーメントを持つ粒子が磁場中で 2 つに分かれること

第 7 章で電荷を持つスピン 1/2 の粒子は不均一磁場中で、波束がスピンの向きに応じて 2 つに分離すると述べたが、この付録では、そのことが量子力学の時間発展方程式で現実に起こりうることを示す。粒子の軌道グループでは位置  $\mathbf{x}$ 、スピングループでは  $z$  方向表示でのハミルトニアン  $H$  は付録 B で述べたように、CGS ガウス単位系で

$$H = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{i=3} \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_i} - A_i \right)^2 - \frac{q}{mc} (B_x S_{z'/z}^x + B_y S_{z'/z}^y + B_z S_{z'/z}^z)$$

だと考えられる。ここで  $A_i$  はベクトルポテンシャル、 $q$  は電荷、 $m$  は質量、 $c$  は光速、 $B_x, B_y, B_z$  は磁場のそれぞれの成分。ベクトルポテンシャルはローレンツ力に関わる項であり、今はスピンによる上下の分離を考えたいのでベクトルポテンシャルは無視しよう。するとハミルトニアンは

$$H = \frac{\hbar^2}{2m} \Delta - \frac{q}{mc} (B_x S_{z'/z}^x + B_y S_{z'/z}^y + B_z S_{z'/z}^z)$$

となる。位置  $\mathbf{x}$ 、スピングループでは  $z$  方向表示での確率振幅  $\psi(\mathbf{x}, z)$  の時間発展方程式は

$$i\hbar \frac{d\psi(\mathbf{x}, z)}{dt} = \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(\mathbf{x}, z) - \sum_{x,z} \frac{q}{mc} (B_x S_{z'/z}^x + B_y S_{z'/z}^y + B_z S_{z'/z}^z) \psi(\mathbf{x}, z) \quad (\text{C.1})$$

となる。 $\psi(\mathbf{x}, z)$  の測定変数  $z$  はスピンの上下に応じてそれぞれ  $+$  と  $-$  をとるとする。この方程式で  $\psi(\mathbf{x}, +)$  と  $\psi(\mathbf{x}, -)$  の波束がそれぞれ上下に分離するかを見てみたい。しないなら、この方程式は現実に合わないということでは正しくないのである。

スピン演算子の  $z$  方向の表示は、付録 A で述べたように

$$S_{z'/z}^x = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad S_{z'/z}^y = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad S_{z'/z}^z = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

である。だから

$$B_x S_{z'/z}^x + B_y S_{z'/z}^y + B_z S_{z'/z}^z = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} B_z & B_x - iB_y \\ B_x + iB_y & -B_z \end{pmatrix}$$

となる。これを使うと時間発展方程式 (C.1) は、 $\psi(\mathbf{x}, +), \psi(\mathbf{x}, -)$  をそれぞれ  $\psi_+(\mathbf{x}), \psi_-(\mathbf{x})$  と書き換えて、

$$i\hbar \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \psi_+(\mathbf{x}) \\ \psi_-(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \begin{pmatrix} \psi_+(\mathbf{x}) \\ \psi_-(\mathbf{x}) \end{pmatrix} - \frac{q\hbar}{2mc} \begin{pmatrix} B_z & B_x - iB_y \\ B_x + iB_y & -B_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_+(\mathbf{x}) \\ \psi_-(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

となる。これを展開すると

$$i\hbar \frac{d}{dt} \psi_+(\mathbf{x}) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi_+(\mathbf{x}) - \frac{q\hbar}{2mc} [B_z \psi_+(\mathbf{x}) + (B_x - iB_y) \psi_-(\mathbf{x})]$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} \psi_-(\mathbf{x}) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi_-(\mathbf{x}) - \frac{q\hbar}{2mc} [-B_z \psi_-(\mathbf{x}) + (B_x + iB_y) \psi_+(\mathbf{x})]$$

となる。今、磁場は図 C.1 のように  $z$  軸の正の向きに向いており、上に行くほど磁場は強くなっていると

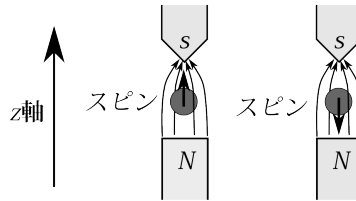


図 C.1

よう。そして横方向の磁場  $B_x$  と  $B_y$  は縦方向の磁場  $B_z$  に比べて十分小さいとしよう。とは言っても  $B_x, B_y$  が小さすぎると  $B_z$  は上向き平行になってしまい、磁場は一定になってしまう。小さすぎてもだめなのだが、とにかく横方向の磁場は無視できるとしよう。すると時間発展方程式は

$$i\hbar \frac{d}{dt} \psi_+(\mathbf{x}) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi_+(\mathbf{x}) - \frac{q\hbar}{2mc} B_z \psi_+(\mathbf{x})$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} \psi_-(\mathbf{x}) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi_-(\mathbf{x}) + \frac{q\hbar}{2mc} B_z \psi_-(\mathbf{x})$$

となる。さて第 4 章の式 (4.8) で述べたように、位置の確率振幅が方程式

$$i\hbar \frac{d\psi}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V \psi$$

を満たすとき波束の平均の位置  $\langle x \rangle$  は

$$\frac{d^2 \langle x_i \rangle}{dt^2} = -\left\langle \frac{\partial V}{\partial x_i} \right\rangle$$

を満たすのであった。それを今の方程式に適用すると、それぞれ  $-\frac{q\hbar}{2mc} B_z, \frac{q\hbar}{2mc} B_z$  がポテンシャル  $V$  の役割を演じているのだから、 $\psi_+, \psi_-$  の波束の  $z$  成分の平均  $\langle z \rangle_+, \langle z \rangle_-$  は

$$\frac{d^2 \langle z \rangle_+}{dt^2} = \frac{q\hbar}{2mc} \left\langle \frac{\partial B_z}{\partial z} \right\rangle$$

$$\frac{d^2 \langle z \rangle_-}{dt^2} = -\frac{q\hbar}{2mc} \left\langle \frac{\partial B_z}{\partial z} \right\rangle$$

を満たすことになる。今  $\frac{\partial B_z}{\partial z} > 0$  としているのだから、 $q > 0$  とすると、 $\langle z \rangle_+$  は上に加速し、 $\langle z \rangle_-$  は下に加速するということである。波束もおおむね平均値の運動に従うと考えれば、スピンの向きに応じて上下に分離するということである。やや粗っぽい議論だったが、波束がスピンの向きによって上下に分離することは十分ありうるということはわかったと思う。そしてシュテルン—ゲルラッハの実験が示しているように、実際に上下に分離するのだから、この方程式は現実を——非常に大雑把にだが——説明することができるわけで、この方程式の正しさの根拠になるということである。

## 付録 D

# 演算子のエルミート性

固有ベクトル法で出てきた演算子のエルミート性を示す。ここで位置の確率振幅は遠方では消えるものに制限する。これは妥当な制限である。地球にある電子がアンドロメダ星雲まで広がっていると考える意味がなからう。

### 運動量演算子

$f, g$  を位置  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  の関数とする。

$$\begin{aligned}\int f^*(\mathbf{r}) \frac{\hbar}{i} \frac{\partial g(\mathbf{r})}{\partial x} dx dy dz &= \int f^*(\mathbf{r}) \frac{\hbar}{i} [g(\mathbf{r})]_{x=-\infty}^{x=+\infty} dy dz - \int \frac{\partial f^*(\mathbf{r})}{\partial x} \frac{\hbar}{i} g(\mathbf{r}) dx dy dz \\ &= \int \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial x} \right)^* g(\mathbf{r}) dx dy dz \\ &= \left( \int g^*(\mathbf{r}) \frac{\hbar}{i} \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial x} dx dy dz \right)^*\end{aligned}$$

つまり

$$\int f^*(\mathbf{r}) \cdot \hat{p}_x \cdot g(\mathbf{r}) dx dy dz = \left( \int g^*(\mathbf{r}) \cdot \hat{p}_x \cdot f(\mathbf{r}) dx dy dz \right)^*$$

である。ゆえに運動量演算子はエルミートである。

ところで運動量測定状態の位置表示は

$$\exp\left(i\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{\hbar}\right)$$

であり、遠方で確率振幅が消えるということを満たしていない。となると今の前提条件が崩れてしまう。これはある範囲内ではこの式でよいが、ある範囲外では突然 0 になるというようにすれば良いと思う。となるとその境界上でこの関数は運動量演算子の固有関数でなくてってしまうのだが、それはおそらく問題は起きないと思う。このことについてはあまり深く考えていないのだが、機会があったらしっかりと考えてみたい。今回はこの程度で終わっておくことにする。

### 位置演算子

$$\int f^*(\mathbf{r}) \cdot x \cdot g(\mathbf{r}) dx dy dz = \left( \int g^*(\mathbf{r}) \cdot x \cdot f(\mathbf{r}) dx dy dz \right)^*$$

なのでエルミート演算子である。同様に位置のみの関数、例えばポテンシャルはエルミートである。

## エネルギー

エネルギー演算子は

$$\sum_i \frac{p_i^2}{2m} + V(\mathbf{r})$$

である。エルミート行列の自乗はエルミートである。またエルミート行列にエルミート行列を足したのもエルミート行列である。よってエネルギー演算子はエルミートである。また磁場がある場合エネルギー演算子は

$$\sum_{i=1}^3 \frac{1}{2m} \left( p_i - \frac{q}{c} A_i(\mathbf{r}) \right)^2 + V(\mathbf{r})$$

であるが、同じ理由でエルミートである。

## 角運動量

角運動量の例えば  $z$  成分は

$$xp_y - yp_x$$

である。交換するエルミート行列  $x$  と  $p_y$  をかけ合わせてもエルミート行列である。だから角運動量はエルミートである。またエルミートの自乗もエルミートなので角運動量の自乗もエルミートである。

## 付録 E

# 固有値が実数であること、固有ベクトルが直交すること

固有値が実数であること

$\phi$  はエルミート演算子  $B$  の固有ベクトルで固有値は  $b$  とする。

$$\phi^\dagger B\phi = \phi^\dagger b\phi = b\phi^\dagger\phi$$

であるが一方

$$\phi^\dagger B\phi = (B\phi)^\dagger\phi = (b\phi)^\dagger\phi = b^*\phi^\dagger\phi$$

である。だから

$$b\phi^\dagger\phi = b^*\phi^\dagger\phi$$

だから  $b = b^*$  つまり実数でなければならない。

異なる固有値に対応する固有ベクトルが直交すること

$\phi_1, \phi_2$  はエルミート演算子  $B$  の固有ベクトルで固有値はそれぞれ  $b_1, b_2$  とする。

$$\phi_2^\dagger B\phi_1 = \phi_2^\dagger b_1\phi_1 = b_1\phi_2^\dagger\phi_1$$

である。一方

$$\phi_2 B\phi_1 = (B\phi_2)^\dagger\phi_1 = (b_2\phi_2)^\dagger\phi_1 = b_2\phi_2^\dagger\phi_1$$

である。だから

$$b_1\phi_2^\dagger\phi_1 = b_2\phi_2^\dagger\phi_1$$

である、もしこの2つの固有値  $b_1$  と  $b_2$  が異なるなら  $\phi_2^\dagger\phi_1 = 0$  でなければならない。

# おわりに

最後に、量子力学についての感想のようなものをざっくばらんに書いてみたい。

## 疑問点、問題点

### 測定後の状態

公式の量子力学の見解に従えば、位置を測るとその測定値の測定状態に飛び移り、その状態の運動量の確率分布は  $-\infty$  から  $+\infty$  まですべての値で等しくなる。その結果、エネルギーの期待値は無限大になる。運動量を測った場合も同様である。しかし、これは霧箱の例（6.2 節参照）でも見ているように事実と反している。「いやいや、実際の位置の測定には幅があり、デルタ関数に収束するというのは極限である。だから運動量の確率分布も  $-\infty$  から  $+\infty$  ではなく、有限の範囲なのだ。」という反論もあろう。確かにデルタ関数というのは極限の話である。実際は幅があるに決まっている。しかしその場合でも運動量の確率分布は等方的になるであろう。しかし霧箱では、検出された粒子の運動量は決して等方的な確率分布にならず、過去の履歴を保ったまま運動を続けている。だから位置を測ったら運動量の確率分布がどうなるかは、場合場合によるのだろうし、要は、わからないというだけのことなのである。

### 観測問題

明らかにおかしな問題として、観測問題がある。状態は測定時だけは通常の時間発展方程式に従わない。しかし、測定装置も電子などで構成されている自然の一部であり、測定という行為も自然現象の一つである。そのときだけ通常の時間発展方程式に従わないというのは明らかにおかしなことである。自然の連続性を考えれば、測定直後に再びその物理量を測れば、同じ値が得られるはずである。だから波束の収縮ということ自体は、確率というのが基本原理になっている量子力学では避けられないことだと思う。その波束の収縮がシュレディンガー方程式で記述できればよいのだが、第 8 章で述べたように、できそうにないのである。

### 古典論にいつ入るか

測定するにはどこかで古典論（決定論）に入らなければならない。霧箱では白い線が見えるだけである。それを見て粒子が通ったという推測が成り立つためには、粒子が過飽和蒸気に衝突してそれが水滴になったという決定論（古典論）としての理論が必要なのである。しかしその古典論自体が正しくないといっているのである。正しくない理論を根拠に測定するということは到底理解できないことである。

量子力学は謙虚にならなければならない。わかっていないことが多いのである。理論を早急に完成させすぎたのである。電子の運動がシュレディンガー方程式に従うのは正しいし、エネルギー測定値が飛び飛びになるのも正しいであろう。しかし波束の収縮はどのようなのだろうか。確率でしかわからないというのはどのようなのだろうか。1つ1つの粒子がポツンポツンと来て干渉縞が現れるという実験もあるらしいが、直接確かめた実験は

あまり多くないのではないか。真実に向かう道は、個々の実験を分析して、正しい部分を見つけ出すことではないかと思う。

### 情報と量子力学的確率分布

第7章では、状態が既知か未知かの場合わけをして話をした。つまり粒子は何らかの状態にあるが、その状態を我々が知っている場合と知らない場合というわけである。大きさに言えば、真の状態というものが存在しているが単にそれを我々が知っていたり、知らなかったりということである。これが公式の量子力学の見解だと思う。しかしこれについては何かおかしなものを感じる。例えばある箱に粒子が閉じ込められているとすると、この粒子の量子力学的の意味での位置の確率分布は箱いっぱい広がっているのだろうか、それとも箱の一部に局在しているのだろうか。箱の中にあるという情報だけからは、真の確率分布（状態とは確率分布の組ことであった）について、位置の確率分布が箱の外では消えるということ以外は何とも言えない。しかし位置の（真の）確率分布は箱の中に均等に広がっていると考えた方がいいと感じる。というのは例えば位置を測定したとして、測定値はある範囲だったとすると、測定後の位置の確率分布はその範囲全体に広がっていると考え、決してその範囲のほんの一部とは考えないからである。簡潔に言えば、量子力学の確率分布というのは我々が知らない分だけの広がりがあるのではないだろうかとは私は感じるのである。

### 初期状態

初期状態をいかにして知るのだろうか。それがわからなければ時間発展方程式も意味をなさない。測定後は測定状態に移るということになっているので、測定後の状態についてはわかるということになっている。しかし、実際はそうはならない。測定値というのは決して、ある値だと断言できるわけではなく、ある範囲にあると言えるだけである。位置を測っても、通常は検出器の大きさの程度の精度しかない。となると、その範囲の中での位置の確率分布もわからないし、当然運動量についてもわからないのである。そういうわけで、測定後も状態は正確にはわからないのである。

測定状態以外では、7.5節で述べたように、全く同じ条件で膨大な粒子の物理量を測定して、その粒子数の分布がわかれば、その中の一つの粒子は、その物理量に対してその粒子数分布と同一の確率分布を持つであろうという推測は——正しいかどうかは断定できないが——できる。

又、第10章で述べた熱平衡にある気体の一つ一つの粒子についての運動量の確率分布は、マクスウェル分布になると——公式の統計力学の見解では一つ一つの粒子はエネルギー測定状態だといっているが——私は思っている。又、カノニカル分布の考えを使えば、十分低い温度では粒子は基底状態にあるとの推論が成り立つわけで、こういう場合も状態が分かる。

初期状態を知る方法はこれと言って明確なものはないと言っていい。ただ、こういう状況ではこういう状態になっているという一種の経験則のようなものはあるのだろう。初期状態がわからなければ時間発展方程式など意味がないというのはそのとおりだが、7.6節でも簡単に触れたが、状態が正確にわからなくても我々が欲しい程度の成果は得られることもあるのである。電子顕微鏡なども、熱源から取り出した電子を加速させることによって、波長をそろえているようだが、実際は熱源の中の電子の運動量はマクスウェル分布であり、大きな幅がある。電子の状態が正確にわかるわけではない。しかし、加速の程度が加速前の電子の運動量の幅に比べて大きければ、加速後の電子の波長はそろっているとんでもよく——簡単に言えば熱源の電子はすべて止まっていたとみなしてよく——電子顕微鏡として機能しているのである。



## 量子力学はどういう意味で正しいか

このように量子力学には観測問題を始めとして疑問点が多い。だからと言って、量子力学のすべてが間違っているわけでは決していない。そこで量子力学のどういう点が正しいか、どういう意味で役に立っているかを簡単に書いてみたい。

### 物質波としての正しさ

まずそれは物質波として粒子の行動がわかるという点である。電子、陽子などの微粒子の運動は時間発展方程式で決まる。これは確率分布の時間発展方程式なのだが、粒子が多数のときは決定論の方程式とみなせる。実験で扱うのは主に多粒子系である。アボガドロ数のような数の粒子である。その粒子群の行動がわかるのである。何割がこっちに行き、何割があっちに行くという、この何割が確率でなく決定論的にわかるのである。散乱実験でも、第8章で述べた2重スリットの実験でもそうである。第7章で述べた不均一磁場の分離でも、スピンの偏りが予めわかっているならば、何割が上に行き、何割が下に行くかの、その何割が予言できるのである(7.7節、図7.27参照)。人間の目からは1個1個の粒子など見えないのだから、これは物質の波動論として決定論的方程式とみなせる。電子顕微鏡もこういう電子波が決定論的方程式として動くこととみなせるとして使われているわけである。こういう物質の行動を波動方程式が決める、それが決定論だというのは、電磁波の方程式が役に立つのに似ている。電磁波は本当は光子からなるが——こういう言い方も正確ではないが——散乱実験でも偏光の実験でも、強度が強まれば正確に記述できる。

### 統計力学への応用

量子力学が役に立っている例としては、エネルギー固有値がわかることによって物質の性質がわかるということである。物性論、統計力学、化学において量子力学が役に立っているのは、正にこのエネルギー固有値という知識によってである。エネルギー固有値と平衡におけるエネルギー分布であるカノニカル分布が結びついて、役に立っているのである。原子の周期律表がなぜあのようになっているのかも、この考えでわかるのである。これはまず、波動方程式の固有値問題から多電子の最低エネルギーを求め、基底状態の波動関数を求め、カノニカル分布から通常の温度ではその多電子は基底状態にいるということがわかり、原子の性質を求めているのである。エネルギー固有値だけでは物質の性質はわからないが、カノニカル分布も合わせて使えばわかるのである。又、化学反応でも、結合するエネルギーを波動方程式の固有値問題で求め、そして反応の起きやすさは、一般には波動方程式からでなく、エネルギーの低い方——これはカノニカル分布から言えば——に行くとして、状態の多い方に行くとして、求めているのである。ここでは波束の収縮などということなど全く関係ない話なのである。他にももちろん量子力学が役に立っている例、正しい例は多々あると思うが、そのつどいような知識を補足し(今の例ならカノニカル分布)役に立っているわけである。

## 決定論に移るためには

量子力学では結果は確率でしかわからないと主張している。確率でしかわからないというのは全く同じ実験をしても結論はAになることもあるしBになることもあるというのである。将来、決定論の物理体系ができるようになるためには、この全く同じ実験というのが実は同じでなく、違いがあり、その違いによって結果がAにもなりBにもなるというようにしなければならない。では全く同じ実験だとみなされているものにどう

違いを見出すのだろうか。それはまず一つには測定される側の粒子の初期状態に違いがあるというのが考えられる。それと実験装置は巨視的には同じ状況に見えても、当たり前だが、微視的には異なる状態にある。同じ温度で実験していても、微視的に実験装置の個々の原子を見れば全く違う状況にあるわけである。こういうところが違うということによって決定論の物理法則が見いだされるしかないのだろう。

二重スリットの実験で考えると、まず分離の方法である運動量の測定状態にある粒子を1つずつ2重スリットに通し、スクリーンで粒子を検出する。それを繰り返すと粒子分布は干渉縞になる。1つ1つの粒子はどこに来るかわからない。その確率がわかるだけである。このような実験は実際にすでに行われているようで、このとおりに粒子数分布は干渉縞になったようである。この実験で考えると毎回来る粒子の状態が全く同じということはあるまい。又、実験装置が微視的に見れば毎回異なる状態にあることは言うまでもない。決定論に移るためにはこれらの違いが粒子の来る位置を決めるその因果関係を見いださねばならない。

ある偏ったスピン状態は作り出せるので、その方向に対して装置を $\theta$ 傾ければ、粒子が通過する確率は上向きが $\cos^2(\theta/2)$ である。これを粒子1つずつで実験を行い確かめたということは聞いたことはないが、仮にこれが実際に起きたとして、何が原因で粒子は上に行ったり、下に行ったりするのだろうか。もし決定論に移ろうとして原因を探るなら、それはやはり粒子の状態が、上に行く粒子と下に行く粒子で異なることに原因があるのか、実験装置に原因があるのかどちらかしかない。

将来的に決定論の物理法則に移ることができるようになるのかは私にはさっぱり予想がつかない。ただ、現在の量子力学では疑問点が多すぎて不満だということである。量子力学にいろんな不満がありながらも、上に述べたように正しい部分もある。多粒子の行動はシュレディンガー方程式で決まるのである。

ボーアらコペンハーゲン学派と言われる人たちは量子力学は最終的な理論だと考えていたようである。少なくとも確率の原理は絶対だと考えていたようである。一方アインシュタインはいずれ決定論に置き換わると考えていたようである。しかしどんなに権威ある人がこれが最終的だと言ってもボーア、ハイゼンベルク、パウリらの著書を読む限り、これが最終的で確率の原理は最終的なものだということに説得力はないのである。それは率直な私の感想である。私としても確率でしかわからないのなら、それはそれでいいのだが、納得させてもらいたいのである。「制御不能な相互作用により時空的記述はあきらめる」などという意味不明のことでは納得できないわけである。権威ある人が正しいと言わなければ、普通に考えれば、量子力学の主張していることには無理があるのである。この論文を書いていて改めてそう思ったしだいである。