

相対性理論 批判的概要と考察

2016年5月11日

序文

この論文は3部構成になっている。第1部で特殊相対論の概要を述べて、第2部で一般相対論の概要を述べて、最後の3部ではシュバルツシルト座標の意味、重力場中の剛体などについての私の研究を載せている。概要と言っても、教科書を写したような記述ではなく、私自身が自分で考えて理解したものを書いた。相対論の教科書で意味の解る本がないのである。7章の「観測との比較」は基本的に内山 [2] の本の説明の流れに沿っているが、その本よりはわかりやすいと思う。私自身がよくわかっていない箇所はその旨を書いた。概要と言っても、相対論について批判的に検討している。

第1部の特殊相対論の概要は、特殊相対性理論の基礎から解説しているわけではなく。相対論的運動学のローレンツ変換のあたりは簡単に公式を書いているだけである。相対論的力学というものにはほとんど言及していない。というのは電磁気や重力以外の力となると、それは接触による力の伝達になるわけだが、それ自体が相対論で扱う意味があるのかどうか、私にはわからないからである。次の相対性論的電磁気学については詳しく書いた。一般相対論は正直言って今の私にとって何か雲を掴むような話である。それはやはり一般相対論が形式的過ぎるからであろう。数式には全てそれに対応する現象があるはずである。しかし一般相対論ではそれが浮かばないのである。特に任意の座標というものに対して私は大きな疑問を感じている。そして第3部で一般座標でもよく知られたシュバルツシルト座標の物理的意味について考察している。しかし幾つかの矛盾点が出てきてしまうのである。私がどこか勘違いしているのか、理論自体の欠点なのか。一般相対論の説明は決して包括的ではないが物理との対応を重視して、なんとか理解しようと苦心して書いた。しかしどうしても曖昧なところはでてしまうのである。一般相対論では時空の歪みなどというSFのようなことがよく言われる。私はこれは単に重力場が場所によって異なるという意味だと思っている。ここでの場所というのは重力源に固定された剛体での場所のことである。一般相対論に必要なテンソル自体については何の説明もしていない。読者がその知識を持っているとしている。ただ、テンソルを知らなくても読めるところは十分あるであろう。変分法は一切使っていない。それは世間では変分原理なるものが重きを置きすぎていると批判的に感じているからである。重力場のエネルギーというものにも一切触れていない。私自身知識もないし、あまり興味もないからである。この論文では力は重力、電磁気力だけに限定して考えている。原子核間の核力、強い力、弱い力などそういうものは一切考えていない。

私の最終的な目標は物理学から形而上学的なものを廃し、すべてを長さに還元して説明することである。実際のところ測定というものは全て長さで測っているので、すでに還元しているといえばそうなのだが、あまりにも物理概念というものは複雑で、その対応がはっきりしなくなっていると思う。もちろんこの論文ですべてを長さに還元するようなことは全くしていない。私の以前の論文「光の軌跡としてのローレンツ変換」[1]では時間を光の移動距離という長さに対応させて説明することができた。この論文ではそういうことはとてもできなかった。私の能力不足のためである。この論文ではわかりづらいところが多々あると思うが、それは単に私の理解不足のためである。相対論では数学と物理法則がごちゃ混ぜになってしまっているが、相対論での物

理的な主張というのは特殊相対性原理・光速度不変の原理・等価原理それと重力場の方程式くらいなものではないであろうか。数学としてのテンソル自体は計算が長だけで概念的には全く難しくない。テンソルというのは物理的、直感的な言い方をすればベクトルやスカラー間の比例定数のことである。相対論は数学先行で式が出来てしまったのでその数式が意味するところが、つまり対応する現象がわからないのである。平行移動のことは書いてあっても具体的にベクトルを平行移動させて説明している本はないのである。相対論の欠点は剛体の運動というものがわかっていないことである。剛体は正に長さの基礎である。それがわかっていないのである。この論文は中間段階にあり、いずれもっと包括的かつより深い理解に達し、矛盾もない論文を書きたいと思っている。

付録で相対論でよく使う公式を掲げた。使ってもらえれば幸いである。相対論では1つ1つの計算が長すぎて容易に公式を導出できない。だから公式集というのが私自身にも必要なのである。

アインシュタインは慣性系というものの原因を観測されたものでなければならないとしている。絶対空間や絶対時間などという観測と関係ないのは廃し、恒星や太陽という固有名詞的なものを原因から廃そうとしている。観測されたものによる原因と言うものについての考察も今後の課題とした。エネルギー及び、運動量というものは変化というものを数えたものであるというのが私の考えなのだが、これもまだ想像の域が出ていないので今後の課題にしたい。重力源に固定された電荷は慣性系に対して加速しているのだから電磁波を放射しているのだろうか。これもいずれ研究したいことである。質量、電荷、長さなどの基本概念の定義や説明ができなかったのは残念である。今後の課題にしたい。

権威を信じるのではなく、自分で考え納得すること、それが学問の進歩につながる。
物理法則とは何が起きるかということであり。それは感覚と感覚の関係である。

2016年5月

2021年8月 誤植を訂正しました。

2023年6月 誤植を訂正しました。

記号・用語について

この論文で使われる記号についての一般原則を記す。ただ例外も出てきていると思うので、そのつど文脈で判断して欲しい。又、巻末の公式集にも記号の定義を載せているので参照して欲しい。

- $\stackrel{\text{def.}}{=}$
 $V^\alpha \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{dX^\alpha}{dt}$ のように $\stackrel{\text{def.}}{=}$ で右辺で左辺を定義しているとする。右辺を書くのが長いので左辺のように書くという意味である。

- $\eta_{\alpha\beta}, \eta^{\alpha\beta}$

$$\eta_{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- \mathbf{v}, \mathbf{E} のように太字で書かれた文字は 3 次元の空間ベクトルを表すとする。

- 3 次元空間の添字には i, j のようにアルファベットを使う。例 v_i, E_j

- 4 次元の添字には α, β, γ のようにギリシャ文字を使う。例 $g_{\alpha\beta}, T^{\alpha\beta}$

- シュバルツシルト計量の α

$$\alpha = \frac{2GM}{c^2}$$

であり、 G は重力定数。 M は中心にある物体の質量。

- $\partial_\alpha \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$

- ローレンツ系は慣性系とほぼ同義語だが、主に慣性系での直交座標自身を指すときに使っている。ここでの直交座標とは空間的には単位直交系であり、時間は秒や、分で計った普通の時間である。ただ慣性系とローレンツ系を明確に使い分けているわけではないので、文脈で判断して欲しい。

- 原則として一般相対論の項目では、局所ローレンツ系座標は大文字 X で、一般座標は小文字で x 記す。

目次

序文	1
記号・用語について	3
第 I 部 特殊相対論の概要	6
第 1 章 相対論的運動学	7
1.1 ローレンツ変換・速度、加速度の変換	7
1.2 運動量の定義	9
1.3 力の量の定義	10
1.4 エネルギー	11
1.5 衝突でのエネルギー・運動量の保存則	12
1.6 重心	14
1.7 質点系のエネルギー運動量テンソル	14
1.8 電荷密度、電流密度の 4 元ベクトル性	17
1.9 $E = mc^2$ について	18
第 2 章 相対論的電磁気学	20
2.1 電磁気学の修正	20
2.2 相対性原理を満たしていることの証明	21
2.3 ベクトルポテンシャルのテンソル形式	25
2.4 電磁場のエネルギー運動量テンソル	26
2.5 電磁場と質点系のエネルギーと運動量の保存則	27
第 II 部 一般相対論の概要	29
第 3 章 序	30
3.1 慣性系の原因	30
3.2 等価原理・一般相対性原理	34
第 4 章 自由粒子と光の運動方程式	36
4.1 局所ローレンツ系座標の作り方	36
4.2 計量テンソル	39

4.3	自由粒子と光の運動方程式	40
4.4	平行移動・共変微分	44
4.5	自由粒子の運動方程式の近似、計量テンソル $g_{\alpha\beta}$ と古典ポテンシャル ϕ との関係	47
第 5 章	重力場の方程式	49
5.1	重力場の方程式	49
5.2	重力場を導出した思考法	51
5.3	ニュートン力学との関係	51
第 6 章	ローレンツ力・マクスウェル方程式の一般座標への座標変換	55
6.1	ローレンツ力・マクスウェル方程式	55
6.2	ベクトルポテンシャル	58
6.3	エネルギー運動量テンソル	59
第 7 章	観測との比較	61
7.1	水星の近日点移動	61
7.2	光の湾曲	66
7.3	赤方偏移	71
第 III 部	考察	73
第 8 章	シュバルツシルト座標の意味について	74
8.1	相対論とユークリッド幾何	74
8.2	シュバルツシルト計量での t, r, θ, ϕ の意味と批判	75
8.3	局所ローレンツ系への座標変換	78
8.4	局所ローレンツ系になることの証明	81
第 9 章	重力場内の剛体	85
9.1	広域ローレンツ系内での定常等加速する運動はないこと	85
9.2	重力場内に静止している剛体にいったい何が起きているのか	87
付録 A	特殊相対論の公式	90
付録 B	特殊相対論・電磁気学の公式	92
付録 C	一般相対論の公式	95
参考文献		98

第 I 部

特殊相対論の概要

第 1 章

相対論的運動学

特殊相対性理論の根本原理は相対性原理と光速不変の原理である。この 2 つの原理に合うように既存の物理学を修正したのが特殊相対性理論である。既存の物理学は基本的には実験的に確立されたものなので特殊相対性理論で修正された理論もある極限で相対論以前の物理学の主張している法則と一致しなければならない。具体的には粒子の速度を v とし $v/c \rightarrow 0$ の極限で古い物理学の法則と一致しなければならない。この章は相対論的電磁気学以外の話題を寄せ集めたような感じであまりまとまりはない。

1.1 ローレンツ変換・速度、加速度の変換

(ローレンツ変換)

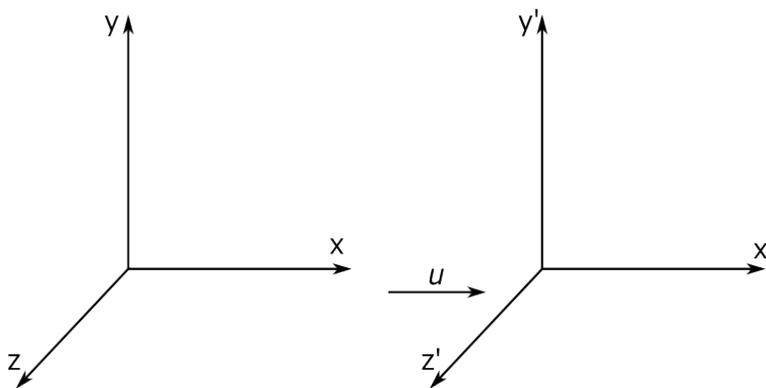


図 1.1

図 1.1 のように、ある慣性系に対して X 軸方向に速度 u で動いている系 (ダッシュ系) への事象間変位の
変換はいわゆるローレンツ変換

$$t' = \frac{t - ux/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z$$

(旧 $t' = t, \quad x' = x - ut, \quad y' = y, \quad z' = z$)

で与えられる。ベクトル形式では

$$t' = \frac{t - \mathbf{u} \cdot \mathbf{x}/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad \mathbf{x}'_{\parallel} = \frac{\mathbf{x}_{\parallel} - \mathbf{u}t}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad \mathbf{x}'_{\perp} = \mathbf{x}_{\perp}$$

となる。ここで \mathbf{x}_{\parallel} はダッシュ系の並進速度 u に平行な成分。 \mathbf{x}_{\perp} は速度 u に直角な成分。以下同じとする。ローレンツ変換の詳しい研究は私の論文「光の軌跡の変換としてのローレンツ変換」[1] を見て欲しい。次の式は意外に使うことが多いので書いておこう。 $1/\sqrt{1-u^2/c^2} = \gamma$ とおいて

$$\begin{aligned}\frac{dt}{dt'} &= \frac{\Delta t}{\gamma(\Delta t - u\Delta x/c^2)} \\ &= \frac{\sqrt{1-u^2/c^2}}{1-uv_x/c^2}\end{aligned}\quad (1.1)$$

(速度の変換)

上記と同じ座標関係で速度の変換則は次のようになる。

$$\begin{aligned}v'_x &= \frac{v_x - u}{1 - uv_x/c^2}, & v'_y &= \frac{\sqrt{1-u^2/c^2}}{1-uv_x/c^2} v_y, & v'_z &= \frac{\sqrt{1-u^2/c^2}}{1-uv_x/c^2} v_z \\ (\text{II}) \quad v'_x &= v_x - u, & v'_y &= v_y, & v'_z &= v_z\end{aligned}\quad (1.2)$$

v'_x だけでなく、座標系の運動方向の直角方向も速度が変わることに注意。これは時間が異なるためである。ベクトル形式では

$$\mathbf{v}'_{\parallel} = \frac{\mathbf{v}_{\parallel} - \mathbf{u}}{1 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}/c^2}, \quad \mathbf{v}'_{\perp} = \frac{\sqrt{1-u^2/c^2}}{1 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}/c^2} \mathbf{v}_{\perp}$$

となる。ここで \mathbf{v}_{\parallel} はダッシュ系の並進速度 u に平行な成分。 \mathbf{v}_{\perp} は速度 u に直角な成分。4元速度ベクトル V^α は

$$V^\alpha \stackrel{\text{def.}}{=} \left(\frac{d(ct)}{d\tau}, \quad \frac{dx}{d\tau}, \quad \frac{dy}{d\tau}, \quad \frac{dz}{d\tau} \right)$$

と定義する。ここで τ は運動粒子の固有時で

$$c\Delta\tau \stackrel{\text{def.}}{=} \sqrt{(c\Delta t)^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2}$$

である。4元速度 V^α と通常速度 v の関係は

$$V^\alpha = \left(\frac{c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad \frac{v_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad \frac{v_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad \frac{v_z}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) \quad (1.3)$$

であり、変換則は4元変位 $c\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z$ の場合と同じである。

(加速度の変換)

加速度の変換は計算が面倒だが、丹念にやればよい。計算過程は略すが、結果は

$$\begin{aligned}a'_x &= \left(\frac{\sqrt{1-u^2/c^2}}{1-uv_x/c^2} \right)^3 a_x \\ a'_y &= \frac{1-u^2/c^2}{(1-uv_x/c^2)^3} \left[\left(1 - \frac{uv_x}{c^2} \right) a_y + \left(\frac{uv_y}{c^2} \right) a_x \right] \\ a'_z &= \frac{1-u^2/c^2}{(1-uv_x/c^2)^3} \left[\left(1 - \frac{uv_x}{c^2} \right) a_z + \left(\frac{uv_z}{c^2} \right) a_x \right] \\ (\text{II}) \quad a'_x &= a_x, \quad a'_y = a_y, \quad a'_z = a_z\end{aligned}$$

となる。だいぶ複雑になった。ただ加速度の変換は線形である。ある系で加速度が2倍になれば、それに対して並進している系でも加速度は2倍になる。ベクトル形式では

$$\mathbf{a}'_{\parallel} = \left(\frac{\sqrt{1-u^2/c^2}}{1-\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}/c^2} \right)^3 \mathbf{a}_{\parallel} \quad \mathbf{a}'_{\perp} = \frac{1-u^2/c^2}{(1-\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}/c^2)^3} \left[\left(1-\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{c^2}\right) \mathbf{a}_{\perp} + \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}}{c^2}\right) \mathbf{v}_{\perp} \right]$$

となる。粒子が静止している系からの変換は上式で $v_x = v_y = v_z = 0$ とおけばよい。粒子静止系での加速度

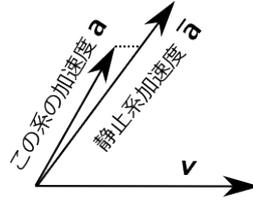


図 1.2

を \bar{a} と書くと

$$a'_x = (1-u^2/c^2)^{3/2} \bar{a}_x, \quad a'_y = (1-u^2/c^2) \bar{a}_y, \quad a'_z = (1-u^2/c^2) \bar{a}_z \quad (1.4)$$

となる。ダッシュ系では粒子は速度 $-u$ で x 軸方向に動いているのだから、一般に x 軸方向に速度 v で動いている粒子の加速度 a' は粒子が静止している系での加速度 \bar{a} と

$$a'_x = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} \bar{a}_x, \quad a'_y = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \bar{a}_y, \quad a'_z = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \bar{a}_z \quad (1.5)$$

の関係にある。ベクトル形式では

$$\mathbf{a}'_{\parallel} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} \bar{\mathbf{a}}_{\parallel}, \quad \mathbf{a}'_{\perp} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \bar{\mathbf{a}}_{\perp}$$

ここで \mathbf{a}_{\parallel} は粒子の速度 v に平行な成分で、 \mathbf{a}_{\perp} は粒子の速度 v に直角な成分粒子の動いている方向に平行な加速度の成分の減少率が大きい。幾何学的関係は図 1.2 のようになる。

4元加速度 A^α は

$$A^\alpha \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{dV^\alpha}{d\tau}$$

で定義する。4元加速度と通常の数値、加速度 v, a との関係は、式 (1.3) を固有時間で微分して

$$A^0 = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}/c}{(1-v^2/c^2)^2}, \quad \mathbf{A} = \frac{\mathbf{a}}{1-v^2/c^2} + \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}/c}{(1-v^2/c^2)^2} \frac{\mathbf{v}}{c} \quad (1.6)$$

となる。

1.2 運動量の定義

相対論では質量 m の質点の4元運動量を4元速度掛ける質量と、すなわち

$$P^\alpha \stackrel{\text{def.}}{=} mV^\alpha \quad (\alpha = 0, 1, 2, 3) \quad (1.7)$$

と定義する。その成分は

$$P^\alpha = \left(\frac{mc}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) \quad (1.8)$$

である。ここで v は質点のただの速度、第 2 項が空間成分。以下同じ。 $\alpha = 1, 2, 3$ に関しては $v/c \rightarrow 0$ の極限でニュートン力学の運動量の定義と一致する。 P^α は 4 元ベクトルとしての変換性をもつ。 $v/c \rightarrow 0$ 極限でニュートン力学の運動量と一致する量などいくらでもある。例えば $\frac{m\mathbf{v}}{1-v^2/c^2}$ もそうである。それなのになぜ mV^α という量にわざわざ運動量と名前をつけるのかということそれは後で述べるように、電磁場の運動量と呼ばれるものと合わせると保存するからである。

余談 定義というものには 2 種類ある。1 つ目は我々がすでに持っている概念の本質を述べその概念を明瞭にするもの。例えば「国家とは云々のことである」や、「政治とは・・・のことである」のうようなものである。2 つ目は単に言葉の置き換えである。主に言葉が長いので短い言葉で置き換えることである。数学ではこの種の定義が多い。今の運動量の定義はこの 2 番目の定義である。

1.3 力の量の定義

力とは加速度の原因となるものことだが、相対論ではその量を 4 元運動量の空間成分の時間微分として定義する。

$$\mathbf{f} \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{d\mathbf{P}}{dt} \quad (1.9)$$

その成分は

$$\mathbf{f} = \frac{m\mathbf{a}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{m\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}/c}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} \frac{\mathbf{v}}{c} \quad (1.10)$$

である。これは式 (1.8) の右辺を時間微分すれば容易に得られる。又は、 $\mathbf{f} = m\mathbf{A}\sqrt{1-v^2/c^2}$ の関係を使えば式 (1.6) から得られる。この力の量は $v/c \rightarrow 0$ の極限でニュートン力学の力の量と形式的には一致する。もちろん力とは加速度の原因となるものを指しているのであり、その量を運動量の時間微分で決めると言っているのである。このように力の量を定義するとその量は系によって異なる値をとる。例えばバネ 4 cm の伸びで質点を引っ張っているとして、その力の量は互いに並進運動している系で異なる値を取る。それはすぐ後で示す式 (1.12) のように変換する。質点が静止している場合は式 (1.10) で $v = 0$ とおいて

$$\mathbf{f} = m\mathbf{a} \quad (1.11)$$

となりニュートン力学での $F = ma$ の関係と同じになる。

x 方向へ速度 u で並進運動している S' 系への力の変換則は

$$f'_x = \frac{1}{1-uv_x/c^2} \left[f_x - \frac{u}{c} \left(\mathbf{f} \cdot \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \right] \quad f'_y = \frac{\sqrt{1-u^2/c^2}}{1-uv_x/c^2} f_y \quad f'_z = \frac{\sqrt{1-u^2/c^2}}{1-uv_x/c^2} f_z \quad (1.12)$$

と系によって (前に言及したように) 力の値が異なる。ニュートン力学との違いである。 $v/c \rightarrow 0, u/c \rightarrow 0$ の極限ではどの系でも同じ値になる。この変換則 (1.12) を証明しよう。「 $'$ 」がついているのが S' 系での量である。

【証明】

$$\frac{dP'_x}{dt'} = \frac{dt}{dt'} \frac{d}{dt} \left(\frac{P_x - (u/c)P^0}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \right) \quad \frac{dP'_y}{dt'} = \frac{dt}{dt'} \frac{dP_y}{dt} \quad \frac{dP'_z}{dt'} = \frac{dt}{dt'} \frac{dP_z}{dt}$$

である。これに式 (1.1) の

$$\frac{dt}{dt'} = \frac{\sqrt{1-u^2/c^2}}{1-uv_x/c^2}$$

と

$$\frac{dP^0}{dt} = \mathbf{f} \cdot \frac{\mathbf{v}}{c} \quad (1.13)$$

を代入すれば式 (1.12) が得られる。式 (1.13) を証明しよう。これは単なる数学の恒等式である。

$$(c\Delta\tau)^2 \stackrel{\text{def.}}{=} (c\Delta t)^2 - \Delta X^2 - \Delta Y^2 - \Delta Z^2$$

の両辺に τ^2 で割って m^2 を掛けると

$$c^2 m^2 = (P^0)^2 - P_x^2 - P_y^2 - P_z^2$$

となる。両辺を時間で微分すると $P^0 \frac{dP^0}{dt} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{P}$ となる。 $P^0 = \frac{mc}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ と $\mathbf{P} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ であることを使うと式 (1.13) を得る。【証明終】

さて質点が静止している系での力 $\bar{\mathbf{f}}$ を、それに対して x 軸方向に速度 u で並進運動している系へ変換しよう。それは式 (1.12) で $v = 0$ とすればよく、

$$f'_x = \bar{f}_x \quad f'_y = \sqrt{1-u^2/c^2} \bar{f}_y \quad f'_z = \sqrt{1-u^2/c^2} \bar{f}_z \quad (1.14)$$

となる。ダッシュ系では質点は速度 $-u$ で x 軸方向に動いているのだから、一般に x 軸方向に速度 v で動いている質点にかかる力 f' は質点が静止している系での加速度 $\bar{\mathbf{f}}$ と

$$f'_x = \bar{f}_x \quad f'_y = \sqrt{1-v^2/c^2} \bar{f}_y \quad f'_z = \sqrt{1-v^2/c^2} \bar{f}_z \quad (1.15)$$

の関係にある。ベクトル形式では

$$\mathbf{f}'_{\parallel} = \bar{\mathbf{f}}_{\parallel} \quad \mathbf{f}'_{\perp} = \sqrt{1-v^2/c^2} \bar{\mathbf{f}}_{\perp}$$

ここで \mathbf{f}_{\parallel} は質点の速度 v に平行な成分で、 \mathbf{f}_{\perp} は質点の速度 v に直角な成分。質点の動いている方向の力は静止系と同じなわけである。

1.4 エネルギー

相対論的な質点のエネルギーを、質点が t_1 から t_2 の間に力 \mathbf{f} を受けているとき、

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} dt \quad (1.16)$$

で定義しよう。これも前コラムで述べた置き換えの定義である。 \mathbf{f} が $v/c \rightarrow 0$ の極限でニュートン力学の力と一致するので、このエネルギーも $v/c \rightarrow 0$ の極限でニュートン力学の質点のエネルギーと一致する。恒等式 (1.13) より $cP^0(t_2) - cP^0(t_1)$ が質点のエネルギーとなる。式 (1.8) から $cP^0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ なので

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad (1.17)$$

がエネルギーとなる。この式でエネルギーを定義しても同じことである。 $v/c \rightarrow 0$ の極限でニュートン力学のエネルギーと一致するのは (1.17) に限らない。それなのにエネルギーをこのように定義するのかと言えば、電磁場のエネルギーと呼ばれる量との和が保存するからである。

1.5 衝突でのエネルギー・運動量の保存則

今、相対論的エネルギーと運動量を定義したが、それが保存量になっているかは全くわからない。保存量にならないなら、こんな量に名前をつけて大切にする必要はないのである。さて、エネルギーの保存だが、ニュートン力学では質点のエネルギーとポテンシャルの和が保存量なのであった。ポテンシャルとは重力か電磁場である。重力は特殊相対論では扱えないので電磁場ということになる。電磁場のエネルギーと質点のエネルギーの和が保存すること及び電磁場の運動量と質点の運動量の和が保存することは節 2.5 で示す。通常の力学での接触による力の伝達の場合にはなんとも言えないのだが、我々が通常接触による力というのはその源は電磁気的なものであろう。だから接触による場合も電磁場も含めればエネルギー・運動量が保存すると考えて良いと思う。

今から、瞬間的で2つの粒子が対称的に衝突する場合を考察してみよう。ただ瞬間と言っても、座標変換をすればその時間は別の系ではその時間間隔はいくらでも大きくなりうることに注意。図 1.3 のように質量の等

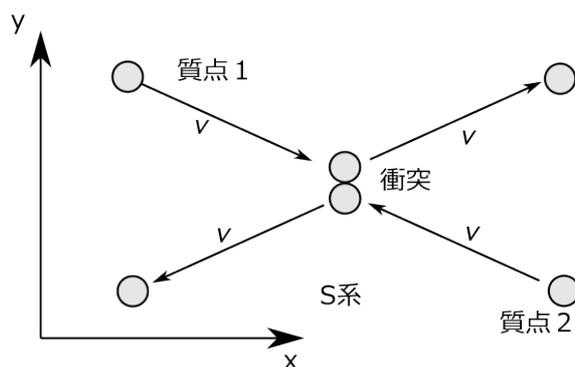


図 1.3

しい2つの質点が、速さは等しいが互いに逆向きで瞬間的に衝突し、衝突後も速さは変わらず、そして互いに逆向きに進んでいくという場合を考える。S系ではこの運動が左右対称になるような座標軸を設けるとする。この運動を X 軸の方向へ速度 u で並進運動している S' 系から眺めよう。S' 系では図 1.4 のように質点 1 は X' 方向の速度成分を持たないとする。S 系では明らかに2つの質点の4元運動量の和は、衝突前と後とは変わらない。すなわち $P_1^\alpha(\text{前})$, $P_2^\alpha(\text{前})$ を衝突前の質点 1 と質点 2 の4元運動量、 $P_1^\alpha(\text{後})$, $P_2^\alpha(\text{後})$ を衝突後の質点 1 と質点 2 の4元運動量とすると

$$P_1^\alpha(\text{前}) + P_2^\alpha(\text{前}) = P_1^\alpha(\text{後}) + P_2^\alpha(\text{後}) \quad (1.18)$$

である。S' 系での4元運動量 P'^μ は

$$P'^\mu = \frac{\partial X'^\mu}{\partial X^\alpha} P^\alpha$$

と変換すれば求まる。この変換係数は衝突前と後で変わらない。だから S' 系でもエネルギーと運動量は保存

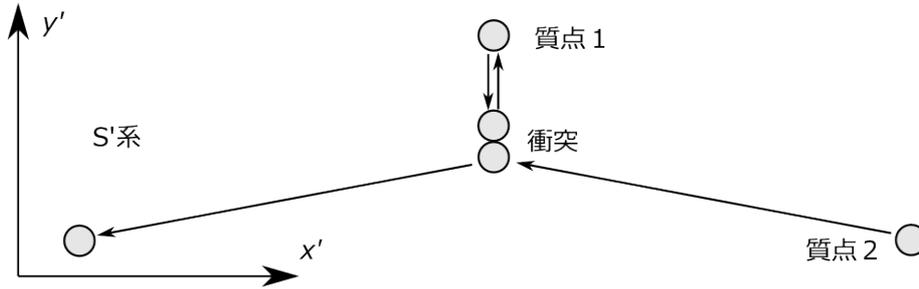


図 1.4

するのである。記号的には式 (1.18) の両辺に $\frac{\partial X'^{\mu}}{\partial X^{\alpha}}$ を掛けて、 α で縮約すると、

$$P_1'^{\mu}(\text{前}) + P_2'^{\mu}(\text{前}) = P_1'^{\mu}(\text{後}) + P_2'^{\mu}(\text{後})$$

となるということである。このことは別にこの例のような対称的な衝突でなくても言えることなので、

瞬間的な衝突において、ある系でエネルギーと運動量の和が衝突前と後で等しいなら別の系でも等しい

と言えるわけである。ただ今のような完全に弾性的かつ瞬間的衝突というのはありえないのであって、ただ 1 つの系で保存すれば別の系でも保存するというを示したに過ぎない。

次にニュートン力学的運動量 mv の和がこの衝突で保存しないことを示そう。S 系から S' 系への速度の変換則は式 (1.2) から

$$v_y' = \frac{\sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 - uv_x/c^2} v_y$$

である。S 系では質点 1 は $v_x > 0$ で、質点 2 は $v_x < 0$ なので S' 系では y 方向に関しては質点 1 のほうが質点 2 より速い。これは衝突前でも後でも言える。だから S' 系でのニュートン力学的運動量の y 方向の和は衝突前は下向きで、衝突後は上向きとなり保存しない。

瞬間的な衝突において、ある系でニュートンのエネルギーと運動量の和が衝突前と後で等しくても別の系では等しくない

ということの 1 つの例を示したのである。

さて少し一般的な話をするが、エネルギーにしる、質量にしる相対論で保存量になるためには、そのもの(例えば質量)自体が空間を連続的に移動しなければならないのである。すなわち保存するためには遠隔作用があってはダメなのである。ニュートン力学のような遠隔力、つまり瞬間的に運動量を空間の離れた点に伝えるは、例えある系で保存量になっても別の系では保存量にならないのである。それはある系では A 地点である量の運動量が減り、同時に B 地点でその運動量を受け取ったとしても、別の系では運動量の放出と受け取りが異なる時間となってしまうからである。粒子の数などは保存量になるいい例である。粒子は空間を有限の速度で移動し、粒子が 1 つということはどの系でも同じだからである。粒子の電荷や質量もその例である。相対論で保存量になるには、その量が粒子のようなものとイメージするとわかりやすいかもしれない。

1.6 重心

重心という概念が必要かどうか私にはわからないが、とりあえず相対論的重心を定義しよう。先の衝突の例では S' 系ではニュートン力学での重心

$$\frac{\sum_i m_i \mathbf{x}_i}{\sum_i m_i} \quad (1.19)$$

は、衝突前は下向きに動き、衝突後は上向きに動く。重心というものを巨視的な物体の位置と考えるなら、外力も働いていないのに速度を変えるというおかしなことになる。我々は外力がないとき、物体の速度が一定であることを知っている。

そこで新たな重心の定義として、式 (1.19) の質量 m のところを

$$m(v) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

に変えてみよう。すなわち重心の定義を

$$\frac{\sum_i m_i(v_i) \mathbf{x}_i}{\sum_i m_i(v_i)} \quad (1.20)$$

としてみよう。これは単にある量に重心に名前をつけただけであり。物理法則を何ら述べてはいない。さてこのように定義した重心は先の衝突の例では速度が変化しないことを示そう。この場合衝突の時しか質点の速度が変化しないので、重心の時間微分は、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m(v_1)\mathbf{x}_1 + m(v_2)\mathbf{x}_2}{m(v_1) + m(v_2)} \right) = \frac{m(v_1)\mathbf{v}_1 + m(v_2)\mathbf{v}_2}{m(v_1) + m(v_2)} = \frac{\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2}{P_1^0/c + P_2^0/c}$$

となる。ここで下付き添字は質点の番号とする。 $\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2$ も $P_1^0/c + P_2^0/c$ も衝突の前と後で同じである。だから衝突の前と後で重心の速度は同じである。衝突の瞬間についてはわからない。

1.7 質点系のエネルギー運動量テンソル

質点系のエネルギー運動量テンソルなるものを今から導入する。なぜこんなものを導入するかと言うとそれは一般相対性理論での重力場の方程式のためである。重力場の方程式では重力源は単なる質量ではなく、エネルギー運動量テンソルだからである。だからこの節は一般相対論のための準備の節である。

エネルギー密度 W 、エネルギー流れの面密度 \mathbf{S} 、運動量密度 \mathbf{G} 、運動量流れの面密度 M^{ij} を使って、エネルギー運動量テンソル $T^{\alpha\beta}$ を

$$T^{\alpha\beta} \stackrel{\text{def.}}{=} \begin{pmatrix} W & \mathbf{S}/c \\ c \mathbf{G} & M^{ij} \end{pmatrix} \quad (1.21)$$

と定義しよう。流れの面密度とは例えば、 \mathbf{S} の x 成分ならば、 x 軸に垂直な面を単位時間、単位面積あたりに流れるエネルギーのことである。エネルギー運動量テンソル $T^{\alpha\beta}$ はテンソルとしての変換性がある。それを示そう。

まず質点がすべて同じ速度 \mathbf{v} の場合のエネルギー運動量テンソルを考えよう。体積 ΔV の中に n 個の質点があり、1つ1つの質量を m_k $k = 1, 2, 3 \dots n$ としよう。この質点系のエネルギー密度 W は、1つ1つの質点のエネルギーが $\frac{m_k c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ なので

$$W = \frac{1}{\Delta V} \sum_{k=1}^n \frac{m_k c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

である。エネルギー流れの面密度 \mathbf{S} だが x 方向の流れの面密度について考えてみよう。時間 Δt の間に x 軸に直角な面積 ΔS を通り抜ける質点は体積 $v_x \Delta t \Delta S$ の中にある質点である (図 1.5)。だから通り抜けるエネ

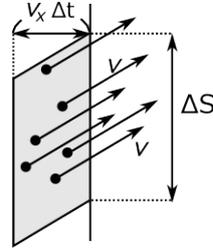


図 1.5 図では面積要素 ΔS が線要素になってしまっているが、それは単に筆者が図をうまく書けなかったためであって、実際は面積要素だと思ってもらいたい。

ルギーは $W \cdot (v_x \Delta t \Delta S)$ である。だから単位時間単位面積あたりに通り抜けるエネルギーは $W v_x$ となる。だからエネルギー流れの面密度 \mathbf{S} は、

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{k=1}^n \frac{m_k c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \mathbf{v}$$

である。運動量密度 \mathbf{G} は、1つ1つの質点の運動量が $\frac{m_k \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ なので

$$\mathbf{G} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{k=1}^n \frac{m_k \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

である。運動量流れの面密度 M^{ij} は、この運動量密度が速度 \mathbf{v} で動いているので

$$M^{ij} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{k=1}^n \frac{m_k v^i}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} v^j$$

である。この表式から、質点系の速度が等しい場合、エネルギー流れの密度と運動量密度の間に

$$\frac{\mathbf{S}}{c} = c \mathbf{G} \quad (1.22)$$

の関係があることがわかる。

n 個の質点が静止している系での、この n 個の質点が入っている空間領域の体積を $\Delta \bar{V}$ としよう。質点が速度 \mathbf{v} で動いているように見える系からこの領域を見ると、運動方向にローレンツ収縮するので $\Delta V = \sqrt{1 - v^2/c^2} \Delta \bar{V}$ の関係がある (図 1.6)。静止系での質量密度 $\bar{\rho}$ は

$$\bar{\rho} = \frac{1}{\Delta \bar{V}} \sum_{k=1}^n m_k$$

なので、これを使うと

$$W = \bar{\rho} V^0 V^0 \quad \frac{S^i}{c} = \bar{\rho} V^0 V^i \quad M^{ij} = \bar{\rho} V^i V^j$$

となる。 V^α は1つの質点の4元速度。 $\bar{\rho}$ はどの系でも同じ値となるので、質点の速度がすべて等しい場合は $T^{\alpha\beta}$ がテンソルとして変換することがわかる。

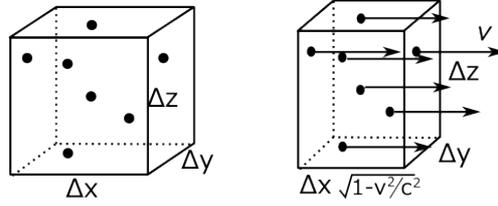


図 1.6 n 個の質点が静止している系での、この n 個の質点が入っている空間領域は、質点が速度 \mathbf{v} で動いているように見える系から見ると、運動方向にローレンツ収縮する

さて、質点の速度が異なる場合を考えよう。これは速度が等しいもの同士でグループ分けして、それを合わせれば良い。個々の静止系での質量密度を $\bar{\rho}_j$ 、4元速度を V_j^α とすると、 $T^{\alpha\beta}$ は

$$T^{\alpha\beta} = \sum_j \bar{\rho}_j V_j^\alpha V_j^\beta \quad (1.23)$$

となる。1つ1つがテンソルとしての変換性を持つので合したのもテンソルとしての変換性を持つ。そして速度が異なる場合も (1.22) の関係が成り立つ。式 (1.23) はローレンツ系以外の座標系でも使える形になっている。尚、式 (1.23) を変形すると、エネルギー密度等は、体積 ΔV の中に n 個の質点があり、それぞれ質量、速度が m_k, \mathbf{v}_k ($k = 1, 2, 3 \dots n$) として

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{\Delta V} \sum_k \frac{m_k c^2}{\sqrt{1 - v_k^2/c^2}} & \mathbf{S} &= \frac{1}{\Delta V} \sum_k \frac{m_k c^2}{\sqrt{1 - v_k^2/c^2}} \mathbf{v}_k \\ \mathbf{G} &= \frac{1}{\Delta V} \sum_k \frac{m_k \mathbf{v}_k}{\sqrt{1 - v_k^2/c^2}} & M^{ij} &= \frac{1}{\Delta V} \sum_k \frac{m_k v_k^i}{\sqrt{1 - v_k^2/c^2}} v_k^j \end{aligned}$$

となる。

質点の速度が光速に比べて遅いときは、 T^{00} に比べて他の成分は小さい。そこで質量密度が

$$\rho = \frac{1}{\Delta V} \sum_{k=1}^n \frac{m_k}{\sqrt{1 - v_k^2/c^2}} \quad (1.24)$$

だとすれば

$$T^{\alpha\beta} \simeq \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.25)$$

と近似できる。この論文に出てくる $T^{\alpha\beta}$ はこの量 (1.25) を使う。我々が測る質量密度がこの表式 (1.24) になるかどうかは断定はできない。

さて質点系に力が働かない場合、すなわち個々の質点は速度が一定の場合、領域内のエネルギーの増減は領域外から入ってきたエネルギーである。だからそのことを数式で表すとそれはよく知られた

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0$$

となる。運動量についても同様に

$$\frac{\partial G^i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \nabla_j M^{ij} = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

である。テンソル形式では

$$\partial_\beta T^{\alpha\beta} = 0 \quad (1.26)$$

である。もちろん外力がかかっている時にはこれらは成り立たない。外力や相互作用が電磁場の時は（通常は電磁場しかないのだが）、電磁場と質点系のエネルギー運動量テンソルを合わせたものでこれらの式が成り立つ。

1.8 電荷密度、電流密度の4元ベクトル性

今と同様に考えて、電荷密度と電流密度が4元ベクトルとして変換することを示そう。すなわち

$$J^\alpha \stackrel{\text{def.}}{=} (\rho, \mathbf{i}/c)$$

が4元ベクトルとして変換するということである。 J^α を4元電流密度と呼ぼう。まず、点電荷がすべて同じ速度で動いている場合を考える。体積 ΔV の中に n 個の点電荷があり、それらがすべて速度 \mathbf{v} で動いているとしよう。1つ1つの電荷量を e_k ($k = 1, 2, 3 \dots n$) とする。すると電荷密度 ρ は

$$\rho = \frac{1}{\Delta V} \sum_{k=1}^n e_k$$

である。電流密度 \mathbf{i} は、この密度が速度 \mathbf{v} で動いているので

$$\mathbf{i} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{k=1}^n e_k \mathbf{v}$$

である。この点電荷が静止している系でのこの n 個の点電荷が入っている体積を $\Delta \bar{V}$ としよう。点電荷が速度 \mathbf{v} で動いているように見える系からこの領域を見ると、運動方向にローレンツ収縮するので $\Delta V = \sqrt{1 - v^2/c^2} \Delta \bar{V}$ の関係がある。静止系での電荷密度 $\bar{\rho}$ は

$$\bar{\rho} = \frac{1}{\Delta \bar{V}} \sum_{k=1}^n e_k$$

であり、これを使うと

$$\rho = \bar{\rho} \frac{V^0}{c} \quad \mathbf{i} = \bar{\rho} \frac{\mathbf{V}}{c}$$

となる。 $\bar{\rho}$ はどの系でも同じ値となるので、 $(\rho, \mathbf{i}/c)$ は4元ベクトルとして変換する。速度が異なる場合は速度が等しい物同士でグループ分けして、それを合わせれば良い。各グループでの静止系での電荷密度を $\bar{\rho}_j$ 、4元速度を V_j^α とすると、 J^α は

$$J^\alpha = \sum_j \bar{\rho}_j \frac{V_j^\alpha}{c} \quad (1.27)$$

となる。1つ1つが4元ベクトルとして変換するので、合したのも4元ベクトルとして変換する。式(1.27)はローレンツ系以外の任意の座標系に変換するときに使える。尚、式(1.27)を変形すると、4元電流密度は、体積 ΔV の中に n 個の点電荷があり、それぞれ電荷、速度が e_k, \mathbf{v}_k ($k = 1, 2, 3 \dots n$) とすると

$$J^\alpha = \left(\frac{1}{\Delta V} \sum_{k=1}^n e_k, \frac{1}{\Delta V} \sum_{k=1}^n e_k \frac{\mathbf{v}_k}{c} \right) \quad (1.28)$$

となる。尚、領域の電荷の増減は領域外から入ってきた電荷によるものなので、いわゆる電荷の保存の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{i} = 0$$

が成り立つ。テンソル形式では

$$\partial_\alpha J^\alpha = 0 \quad (1.29)$$

と書ける。

先のエネルギー運動量テンソルと今回の4元電流を対比してみよう。エネルギー運動量テンソルの場合には個々の点が mV^α という4元ベクトルとしての性質があったので、その密度と流れの面密度は2回テンソルになったのである。今の場合には個々の点が電荷 e というスカラーだったので、その密度と流れの面密度は4元ベクトルになったわけである。

1.9 $E = mc^2$ について

有名な $E = mc^2$ という式の意味は、内部エネルギーの増加が静止質量の増加に比例するという意味である。この関係を導き出したアインシュタインの光の思考実験は有名である。実験的にも原子核反応などでこの関係式は確認されているようである。ポテンシャルのない質点系の場合エネルギーは運動エネルギーだけなのだが、その場合運動エネルギーが大きくなると全体としての質量が大きくなる。だから内部が激しく運動していると重くなる。図1.7のような状況ではバネののびが運動が激しいほうがよく伸びると思われる。その質量の増加は内部エネルギーの増加量を c^2 で割った量になる。この関係を特別な場合としてポテンシャルのない質点系で示そう。

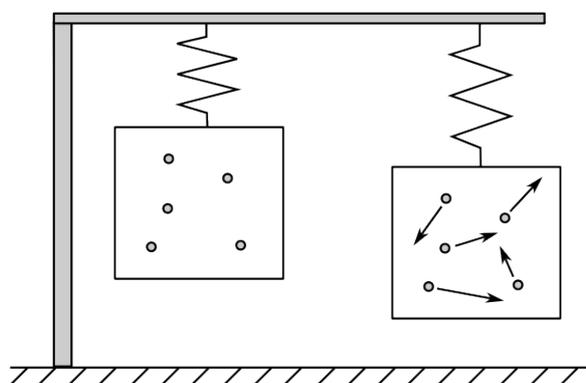


図1.7 激しく運動している方が重い

さて、 $E = mc^2$ を質点系で示すにもいろいろと難しい問題がある。それは質点系での質量と速度の定義である。1個の質点では静止しているとき力と質量と加速度の関係は式(1.11)で述べたように $\mathbf{f} = m\mathbf{a}$ であった。それで質点系の質量も質点系が静止している時の力割る加速度としよう。では質点系が静止しているとはどういうことか、すなわち質点系の速度をどう定義すればよいのだろうか。それをその質点系の運動量が0となる系の速度としよう。すなわち、ある系Sで質点系の運動量を測るとある量になったとする。そしてその運動量が0となる系をS'としよう。運動量が0となる系は必ずある。そしてS系でのその質点系の速度は系Sからみた系S'の速度だという意味である。ここで大事なことなのだが、この質点系の体積は無限小でなければだめだということである。というのはある系で個々の質点のある瞬間の運動量は別の系では同時ではなく

なってしまうからである。ただ体積が無限小であれば時間差も無限小になる。そういうわけで質点系の存在する体積は無限小だと考えてもらいたい。質点系にかかる力だがこれは個々の質点にかかる力の和と考えるのが自然であろう。以上の定義、条件のもとで $E = mc^2$ を示そう。

今 S 系で質点系の運動量の方向に X 座標をとりその値が P_x だったとする。そして運動量が 0 となる S' 系の S 系から見た速度が u だったとしよう。S' 系への運動量の変換は

$$P'_x = \frac{P_x - (u/c)P^0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

である。設定より $P'_x = 0$ なので質点系の速度 u は

$$u = \frac{cP_x}{P^0} \quad (1.30)$$

と表せる。すなわち、ある系で質点系の 4 元運動量の和が P^α だったとすれば、その質点系の速度 v は

$$\mathbf{v} = \frac{c\mathbf{P}}{P^0} \quad (1.31)$$

で与えられる。これは個々の質点の速度の変化がない場合の重心の速度と等しい。

さて今ポテンシャルがない質点系を考える。その系で質点系の速度は 0 だったとしよう。そしてそれぞれの i 番目の質点に力 \mathbf{f}_i が時間が Δt の間かかっていたとしよう。その Δt の間にエネルギーは $\sum_i \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{v}_i \Delta t$ 増える。そして運動量は $\mathbf{f}_i \Delta t$ 増える。エネルギー運動量ベクトルは最初は $(P^0, 0, 0, 0)$ であったが Δt 経過後に

$$\left(P^0 + \sum_i \frac{\mathbf{f}_i \cdot \mathbf{v}_i}{c} \Delta t, \quad \mathbf{f}_i \Delta t \right)$$

となる。式 (1.31) より質点系の速度の変化 $\Delta \mathbf{v}$ は

$$\Delta \mathbf{v} = \frac{c \sum_i \mathbf{f}_i \Delta t}{P^0 + \sum_i \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{v}_i \Delta t / c}$$

となる。これを Δt で割って $\Delta t \rightarrow 0$ の極限をとると、この質点系の加速度 \mathbf{a} は

$$\mathbf{a} = \frac{c \sum_i \mathbf{f}_i}{P^0} \quad (1.32)$$

となる。もちろん、これは式 (1.31) を直接微分しても得られる今は質点系は静止していた。そして力は $\sum_i \mathbf{f}_i$ であった。だからこの質点系の質量は P^0/c となる。これは E/c^2 である。すなわち $E = mc^2$ なのである。

第 2 章

相対論的電磁気学

この章ですることは

1. 相対性原理を満たすように電磁気学の法則を修正する。その際、質点の速度が遅い極限 $v/c \rightarrow 0$ で古い電磁気学の法則と一致するようにする。
2. その修正された電磁気学の法則が相対性原理を満たしていることを確認する。
3. 一般相対性理論への準備として電磁気学の法則をテンソルの形に書き換える。これは物理法則とは何の関係もないことであって、新しい記号で物理法則を書き換えるというだけである。ひらがなで書いてあるものをカタカナで書くようなものである。

相対性原理とはあらゆる慣性系で同じ物理法則が成り立つという主張である。ある慣性系である初期条件が与えられれば、その後の変化は決まる。そして別の系でも同じ初期条件なら、その後の変化は同じであるという意味である。ある慣性系でマッチをすれば火がつくなら、別の慣性系でもマッチをすれば火がつくということである。

2.1 電磁気学の修正

古い電磁気学と変わるのはローレンツ力の式だけでありマクスウェル方程式はそのままである。すなわち古い電磁気学ではローレンツ力の式は

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) \quad (\text{旧})$$

だが、速度の時間微分のところを 4 元速度の時間微分に変える。すなわち

$$m \frac{d\mathbf{V}}{dt} = e \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) \quad (\text{新}) \quad (2.1)$$

とする。左辺は運動量の時間微分なので、右辺は電荷にかかる相対論的力を表している。ローレンツ力の式は電荷の運動の法則を示すとともに電磁場の定義も含んでいる。だから相対論では電磁場の定義が変わるのである。電磁場とは何ですかと言われれば 3 次元ベクトルの 2 つの組であり、その量はローレンツ力の式で定義されるというわけである。この電磁場の定義は古い電磁気学と $v/c \rightarrow 0$ の極限で一致する。電場だけなら、古

い電磁気学と全く同じである*1そしてマクスウェル方程式

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi k_1 \rho \qquad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 4\pi k_1 \frac{\mathbf{i}}{c} \qquad (1 \text{ 組目})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \qquad (2 \text{ 組目})$$

はそのままである。これが相対性原理を満たす電磁気学の法則になる。これが相対性原理を満たし、かつ電荷の速度が遅い極限で古い電磁気学に一致するということを満たすための修正の唯一の可能なものなのかどうかはわからない。

余談 任意の単位系への変換 任意の単位系へすぐ変換できる表示は

$$m \frac{d\mathbf{V}}{dt} = e \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \left(\frac{c}{k_2} \mathbf{B} \right) \right)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi k_1 \rho \qquad \nabla \times \left(\frac{c}{k_2} \mathbf{B} \right) - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 4\pi k_1 \frac{\mathbf{i}}{c}$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{c}{k_2} \mathbf{B} \right) = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{c}{k_2} \mathbf{B} \right) = 0$$

となる。この式で k_1, k_2 のところへ下記の表 2.1 の値を入れればその単位系での式が得られる。本文中では k_1 はそのまま残してあるが、 k_2 を入れた式は長くなるので cgs ガウス単位系の $k_2 = c$ を入れた式になっている。もし他の単位系の式が得たいなら、 \mathbf{B} のところを $\frac{c}{k_2} \mathbf{B}$ と書き換えて、 k_2 のところへその単位系の値を入れれば良い。尚、 c/k_2 を一つの定数とすれば簡潔でよいのになぜ、今の形にしているかということ、何の合理性もなく、ただ単に筆者の習慣のためである。

表 2.1

	SI 単位系	cgs ガウス単位系	cgs 静電単位系	cgs 電磁単位系	cgs ヘビサイドローレンツ単位系
k_1	$1/4\pi\epsilon_0$	1	1	c^2	$1/4\pi$
k_2	1	c	1	1	c

2.2 相対性原理を満たしていることの証明

では今示した法則が相対性原理を満たしていることを証明しよう。ローレンツ力の式 (2.1) に Δt を掛けて

$$\Delta \mathbf{P} = \frac{e}{c} \left(\mathbf{E} (c\Delta t) + \Delta \mathbf{X} \times \mathbf{B} \right) \qquad (2.2)$$

と書き換えよう。行列の形に書くと

$$\begin{pmatrix} \Delta P_x \\ \Delta P_y \\ \Delta P_z \end{pmatrix} = \frac{e}{c} \begin{pmatrix} E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\Delta t \\ \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix} \qquad (2.3)$$

*1 静止質点の運動量の変化は相対論でもニュートン力学でも同じだからである。

となる。この式は点電荷の4元微小変位と運動量の微小変化の関係を示しており、その比例定数が電磁場であることを示している。この式で点電荷の変位が $c\Delta t$ のみ0でない。つまり静止している場合。 $c\Delta t, \Delta X$ のみ0でない。つまり X 軸方向に動いている場合。 $c\Delta t, \Delta Y$ のみ0でない。つまり Y 軸方向に動いている場合。それぞれの変位での運動量の変化を測れば電磁場の値は決まり、それが電磁場の定義である。電磁場とは何ですか。その量はどのように測るのですか。磁場はどうですか。と聞かれれば、それはこの手続によって測れる量のことであるというのが答えである。電場だけの定義なら口で言うのはやさしいが、磁場も含めると電磁場の定義はこれ以上簡単には言えない、このような複雑なものなのである。

新しいローレンツ力の式とマクスウェル方程式で運動は決まるのだが、ある系で運動が決まったら、別の系でも決まってしまう。その決まった運動法則が新しいローレンツ力の式とマクスウェル方程式を満たすことを示す。

(電磁場の変換いかにあらねばならないか)

電磁場というのは1つの系で与えられれば、別の系でも必然的に決まる。例えば単位質量、単位電荷の質点がある速度で動いているとしよう。それにかかる力は式(2.1)により、その系での電場、磁場が与えられれば決まる。その運動をその粒子が静止して見える系から見れば、その単位時間あたりの運動量の変化がその系での電場である。その系の単位時間あたりの運動量の変化は元の系の単位時間あたりの運動量の変化が決まれば決まる。そして元の系の単位時間あたりの運動量の変化は元の系の電場と磁場が決まれば決まる。だからその系での電場は元の系の電磁場が与えられれば必然的に決まるのである。ここではいちいち個々の例を挙げずに総括的に電磁場の変換がいかにあるべきかを示す。

恒等式(1.13)の $\Delta P^0 = \mathbf{f} \cdot \Delta \mathbf{X} / c$ で、力 \mathbf{f} のところにローレンツ力の式(2.1)を入れると

$$\Delta P^0 = e \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) \cdot \frac{\Delta \mathbf{X}}{c}$$

となる。3次元変位 $\Delta \mathbf{X}$ と $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ は直交するので

$$\Delta P^0 = \frac{e}{c} (E_x \Delta X + E_y \Delta Y + E_z \Delta Z) \quad (2.4)$$

をえる。これを、ローレンツ力の行列方程式(2.3)に加えよう。すると

$$\begin{pmatrix} \Delta P^0 \\ \Delta P_x \\ \Delta P_y \\ \Delta P_z \end{pmatrix} = \frac{e}{c} \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\Delta t \\ \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

となる。今 S 系で電磁場が与えられているとする。

X 軸方向に速度 u で動いている S' 系では電磁場の値はどうなるか。そしてその求めた電磁場がローレンツ力の式をみたしているか。

を調べる。(2.5)を

$$\Delta P = \frac{e}{c} \cdot \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{H} \quad (2.6)$$

と簡潔に書こう。 S 系から S' 系へのローレンツ変換の行列を L と書こう。すると

$$\begin{aligned} L^{-1} \Delta P' &= \frac{e}{c} \cdot \mathbf{F} \cdot L^{-1} \Delta \mathbf{H}' \\ \Delta P' &= \frac{e}{c} (L \cdot \mathbf{F} \cdot L^{-1}) \Delta \mathbf{H}' \end{aligned} \quad (2.7)$$

となる。S系でのローレンツ力の式(2.6)と比べると、このS'系でも同じローレンツ力の式が成り立っていないなければならない。だから $L \cdot F \cdot L^{-1}$ の各成分がS'系の電磁場とならねばならない。例えば行列 F の1行2列は E_x だから $L \cdot F \cdot L^{-1}$ の1行2列は E'_x だということである。 $L \cdot F \cdot L^{-1}$ を成分で書くと

$$L \cdot F \cdot L^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \frac{u}{c} & 0 & 0 \\ -\gamma \frac{u}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \frac{u}{c} & 0 & 0 \\ \gamma \frac{u}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

である。ここで $\gamma = 1/\sqrt{1-u^2/c^2}$ である。これを計算すれば電磁場の変換式が出るわけである。結果は

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x & E'_y &= \frac{E_y - (u/c)B_z}{\sqrt{1-u^2/c^2}} & E'_z &= \frac{E_z + (u/c)B_y}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \\ B'_x &= B_x & B'_y &= \frac{B_y + (u/c)E_z}{\sqrt{1-u^2/c^2}} & B'_z &= \frac{B_z - (u/c)E_y}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \end{aligned} \quad (2.9)$$

となる。これは系の運動方向の平行成分と直行成分に分けたら

$$\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel} \quad \mathbf{E}'_{\perp} = \frac{\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{u}/c \times \mathbf{B}_{\perp}}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \quad \mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel} \quad \mathbf{B}'_{\perp} = \frac{\mathbf{B}_{\perp} - \mathbf{u}/c \times \mathbf{E}_{\perp}}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \quad (2.10)$$

と書ける(図2.1参)。結局電磁場は式(2.9)のように変換しなければならないし、またそう変換すればS'系でもローレンツ力の式が成り立つわけである。

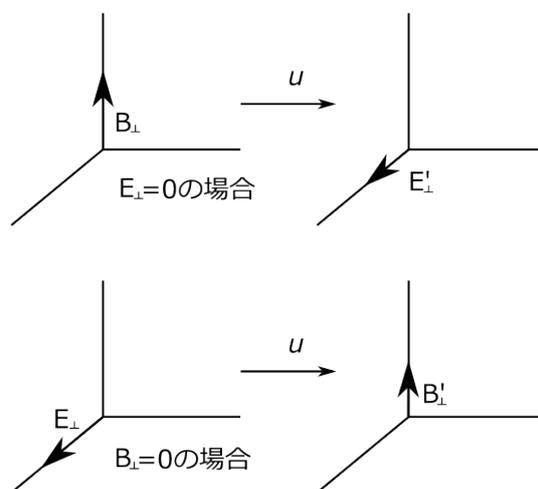


図 2.1

(マクスウェル方程式を満たすこと)

今S系からS'系への電磁場の変換がどうあらねばならないかを導いたわけだが、次はその変換された電磁場がS'系でマクスウェル方程式を満たすことを示さねばならない。

我々は S' 系でマクスウェル方程式を満たすことをテンソルの記号を使って証明する。テンソルの変換性を使った方が容易だからである。エネルギーも含めたローレンツ力の式 (2.5) は

$$\Delta P^\alpha = \frac{e}{c} f^\alpha_\beta \Delta X^\beta \quad (2.11)$$

と書ける。ここで

$$f^\alpha_\beta \stackrel{\text{def.}}{=} \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

であり、縦方向には α 横方向には β が対応している。さて式 (2.11) は

$$\Delta P'^\mu = \frac{e}{c} \frac{\partial X'^\mu}{\partial X^\alpha} f^\alpha_\beta \frac{\partial X^\beta}{\partial X'^\nu} \Delta X'^\nu$$

と変形できる。(2.11) と比べると f^α_β は 2 階混合テンソルとして変換しなければならないということである。すなわち

$$f'^\mu_\nu = \frac{\partial X'^\mu}{\partial X^\alpha} f^\alpha_\beta \frac{\partial X^\beta}{\partial X'^\nu}$$

と変形されねばならない*2。今の話は式 (2.6) から (2.9) を導いたことをテンソル表示で書いてだけで全く同じことなのである。先ほどしたことは F が混合テンソルとして変換しなければならないということだったのである。 f^α_β の添字を上げ下げした

$$f^{\alpha\beta} \stackrel{\text{def.}}{=} \eta^{\alpha\gamma} f^\alpha_\gamma \quad f_{\alpha\beta} \stackrel{\text{def.}}{=} \eta_{\alpha\gamma} f^\gamma_\beta$$

はともに反対称テンソルとなる。成分は

$$f^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ -E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} \quad f_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

となる。縦方向には α 横方向には β が対応している。

さて、この $f^{\alpha\beta}$ と $f_{\alpha\beta}$ を使って、マクスウェル方程式を書こう。1 組目のマクスウェル方程式

$$\left(\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi k_1 \rho, \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 4\pi k_1 \frac{\mathbf{i}}{c} \right) \quad \text{は} \quad \partial_\beta f^{\alpha\beta} = 4\pi k_1 J^\alpha$$

と書ける。これは (2.13) の成分を入れてみれば容易に確かめられるだろう。この式はテンソル方程式なので $f^{\alpha\beta}$ と J^α がテンソルとして変換すればどの系でも成り立つ。そしてすでに見たように $f^{\alpha\beta}$ と J^α はテンソルとして変換する。よって S' 系でマクスウェルの 1 組目が成り立つというわけである。

次にマクスウェル方程式の 2 組目が成り立つことを示そう。 $f_{\alpha\beta}$ を使って $\partial_\gamma f_{\alpha\beta}$ の添字を巡回させたテンソルを作る。

$$H_{\alpha\beta\gamma} \stackrel{\text{def.}}{=} \partial_\alpha f_{\beta\gamma} + \partial_\beta f_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma f_{\alpha\beta}$$

*2 f^α_β は反変ベクトル間の比例定数として現れている。ということは混合テンソルだということは実は自明なのである。

$H_{\alpha\beta\gamma}$ はどの添字の入れ替えに対しても添字が反転する完全反対称テンソルである。それは $f_{\alpha\beta}$ が反対称であることを使って、添字を入れ替えてみればすぐわかる。だから $H_{\alpha\beta\gamma}$ はどの添字の組を選ぶかできまり独立なものは4つしかない。そして

$$H_{123} = \nabla \cdot \mathbf{B} \quad H_{023} = \frac{1}{c} \frac{\partial B_x}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{E})_x \quad H_{031} = \frac{1}{c} \frac{\partial B_y}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{E})_y \quad H_{012} = \frac{1}{c} \frac{\partial B_z}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{E})_z$$

となっていることは成分を入れてみればすぐわかる。 $H_{\alpha\beta\gamma}$ はテンソルとして変換するので、ある系で0なら他の系でも0となる。つまりマクスウェル方程式の2組目が成り立つ。結局、マクスウェル方程式の2組目は

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad \text{は} \quad \partial_\alpha f_{\beta\gamma} + \partial_\beta f_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma f_{\alpha\beta} = 0$$

と書けるということである。これで電磁場が式 (2.9) のように変換すれば S' 系でもマクスウェル方程式を満たすことが証明できたわけである。

2.3 ベクトルポテンシャルのテンソル形式

ベクトルポテンシャルを4元ベクトル形式で表現しよう。これは単なる新たな記号の導入であり、物理法則とは何ら関係ないということを強調しておこう。4元ポテンシャルを ϕ, \mathbf{A} を使って

$$A_\alpha \stackrel{\text{def.}}{=} (-\phi, \mathbf{A})$$

と定義する。任意の単位系に適用できる形式は

$$A_\alpha \stackrel{\text{def.}}{=} \left(-\phi, \frac{c}{k_2} \mathbf{A}\right)$$

である。本文では cgs ガウス単位系の $k_2 = c$ を入れてしまっている。他の単位系に移るには \mathbf{A} を $\frac{c}{k_2} \mathbf{A}$ に置き換えて、 k_2 のところに表 2.1 の値を入れればよい。

さて、この4元ポテンシャルを使うと

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad \text{は} \quad f_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$$

となる。この表式から A_α は4元共変ベクトルとして変換すればよいことがわかる。ローレンツ条件

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad \text{は} \quad \partial_\alpha A^\alpha = 0$$

となる。ここで A^α は A_α の添字を上げたもので

$$A^\alpha = (\phi, \mathbf{A})$$

である。又

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) \phi = 4\pi k_1 \rho \quad \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) \mathbf{A} = 4\pi k_1 \frac{\mathbf{i}}{c} \quad \text{は} \quad \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) A^\alpha = 4\pi k_1 J^\alpha$$

となる。

2.4 電磁場のエネルギー運動量テンソル

この節では電磁場のエネルギー保存、運動量保存をテンソル形式に書き換える。電磁場のエネルギー密度等を古典論同様

エネルギー密度	W	$\frac{1}{8\pi k_1} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2)$
エネルギー流れの面密度	\mathbf{S}	$\frac{c}{4\pi k_1} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$
運動量密度	\mathbf{G}	$\frac{1}{4\pi k_1 c} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$
運動量流れの密度	M^{ij}	$\frac{1}{4\pi k_1} \left(\frac{1}{2} \mathbf{E}^2 \delta_{ij} - E_i E_j + \frac{1}{2} \mathbf{B}^2 \delta_{ij} - B_i B_j \right)$

と定義する。このように定義すると質点系と合わせたエネルギー及び運動量が保存するからである。エネルギー流れの面密度： \mathbf{S} と運動量密度： \mathbf{G} との間には

$$\frac{\mathbf{S}}{c^2} = \mathbf{G} \quad (2.14)$$

の関係がある。

(エネルギー)

エネルギー保存は次の関係式から言えることである。

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) = -2\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) - 8\pi k_1 \mathbf{E} \cdot \mathbf{i} \quad (2.15)$$

左辺から右辺に変形するには、マクスウェル方程式とベクトル公式

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$$

を使えば良い。式 (2.15) を変形して

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{8\pi k_1} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) \right) + \nabla \cdot \left(\frac{c}{4\pi k_1} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \right) = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{i} \quad (2.16)$$

としよう。これを見ると電磁場の単位時間・体積あたりのエネルギーの減少量が $\mathbf{E} \cdot \mathbf{i}$ であることがわかる。この量はすぐ後の節 2.5 でみるように質点のエネルギーの増加になっている。つまり電磁場のエネルギーと質点系のエネルギーが保存するわけである。このように保存するからこそ $\frac{1}{8\pi k_1} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2)$ をエネルギー密度と定義したわけである。

(運動量)

運動量の保存は次の関係から言えることである。

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = -\nabla \cdot \left(\frac{1}{2} E^2 \mathbf{I} - \mathbf{E} \otimes \mathbf{E} + \frac{1}{2} B^2 \mathbf{I} - \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} \right) - 4\pi k_1 \left(\frac{\mathbf{i}}{c} \times \mathbf{B} + \rho \mathbf{E} \right) \quad (2.17)$$

ここで、 \mathbf{I} は成分が δ_{ij} の 3 次元の空間テンソル。 $\mathbf{E} \otimes \mathbf{E}$ は成分が $E_i E_j$ の 3 次元の空間テンソル。 $\mathbf{B} \otimes \mathbf{B}$ も同様とする。左辺から右辺に変形するには、マクスウェル方程式とベクトル公式

$$(\nabla \times \mathbf{A}) \times \mathbf{A} = \nabla \cdot (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) - \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \frac{1}{2} \nabla A^2$$

を使えばよい。式 (2.17) を変形して

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi k_1 c} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \right) + \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} E^2 \mathbf{I} - \mathbf{E} \otimes \mathbf{E} + \frac{1}{2} B^2 \mathbf{I} - \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} \right) = - \left(\frac{\mathbf{i}}{c} \times \mathbf{B} + \rho \mathbf{E} \right) \quad (2.18)$$

としよう。これを見ると電磁場の単位時間・体積あたりの運動量の減少量が

$$\frac{\mathbf{i}}{c} \times \mathbf{B} + \rho \mathbf{E}$$

であることがわかる。この量はすぐ後の節 2.5 でみるように質点の運動量の増加になっている。つまり電磁場の運動量と質点系の運動量が保存するわけである。このように保存するからこそ $\frac{1}{4\pi k_1 c} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$ を運動量密度と定義したわけである。

2.5 電磁場と質点系のエネルギーと運動量の保存則

さてようやく質点のエネルギーを式 (1.17)、運動量を式 (1.7) のように定義したかを述べられる。そのように定義すればその量は電磁場と合わせればその量が保存するからである。電磁場の単位時間、単位体積あたりのエネルギーの減少量は $\mathbf{E} \cdot \mathbf{i}$ である。これが質点のエネルギーの増加になっていることを示そう。体積 ΔV の中に n 個の点電荷があり、それぞれ電荷、速度が e_i, \mathbf{v}_i ($i = 1, 2, 3 \dots n$) のときの電流密度は式 (1.28) で述べたように

$$\mathbf{i} = \frac{\sum_i^n e_i \mathbf{v}_i}{\Delta V}$$

であった。だから $\mathbf{E} \cdot \mathbf{i}$ は、

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{i} = \frac{\sum_i^n e_i \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}_i}{\Delta V} = \frac{1}{\Delta V} \sum_i^n \frac{c dP_i^0}{dt}$$

である。最後の式に映るのに式 (2.4) を使った。 $\mathbf{E} \cdot \mathbf{i}$ は、質点系の単位時間、単位体積あたりのエネルギーの増加となる。

運動量については電磁場の単位時間、単位体積あたりの運動量の減少量は

$$\rho \mathbf{E} + \frac{\mathbf{i}}{c} \times \mathbf{B}$$

である。電荷密度も式 (1.28) で述べたように

$$\rho = \frac{\sum_i^n e_i}{\Delta V}$$

であった。だから

$$\rho \mathbf{E} + \frac{\mathbf{i}}{c} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\Delta V} \sum_i^n \left(\mathbf{E} e_i + \frac{e_i \mathbf{v}_i}{c} \times \mathbf{B} \right) = \frac{1}{\Delta V} \sum_i^n \frac{d\mathbf{P}_i}{dt}$$

となって単位時間、単位体積あたりの質点系の運動量の増加となる。

結局

$$\int \frac{1}{8\pi k_1} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) dV + \sum_i \frac{m_i c^2}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}}$$

が保存量になり、 $\frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ は速度 0 の極限で古典論のエネルギーと一致（正確に言えばエネルギーの差が一致）するので、それを質点のエネルギーと呼ぶのである。同様に

$$\int \frac{1}{4\pi k_1 c} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) dV + \sum_i \frac{m_i \mathbf{v}_i}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}}$$

が保存量でかつ速度 0 の極限で $\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ が古典論の運動量と一致するので、それを質点の運動量と呼ぶというわけである。

(テンソル形式)

さて今定義した $W, \mathbf{S}, \mathbf{G}, M^{ij}$ を使って電磁場のエネルギー運動量テンソルを作ろう。これは一般相対論での重力場の方程式に必要なので導入するのである。電磁場のエネルギー運動量テンソル $T^{\alpha\beta}$ を

$$T^{\alpha\beta} \stackrel{\text{def.}}{=} \begin{pmatrix} W & \mathbf{S}/c \\ c\mathbf{G} & M^{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W & S_x/c & S_y/c & S_z/c \\ cG_x & M_{xx} & M_{xy} & M_{xz} \\ cG_y & M_{yx} & M_{yy} & M_{yz} \\ cG_z & M_{zx} & M_{zy} & M_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

と定義する。 α と β に関し対称な対称テンソルである。この $T^{\alpha\beta}$ は電磁場テンソル $f^{\alpha\beta}$ を使って

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi k_1} \left(\eta_{\lambda\gamma} f^{\lambda\alpha} f^{\gamma\beta} - \frac{\eta^{\alpha\beta}}{4} f_{\lambda\gamma} f^{\lambda\gamma} \right)$$

と書ける。実際これが式 (2.19) と等しいことを確かめるには丹念に計算していくしかない。この式の右辺はテンソルとして変換する。だから $T^{\alpha\beta}$ はテンソルとして変換するのである。

エネルギー保存、運動量保存を表す式 (2.16) と (2.18) は

$$\partial_\beta T^{\alpha\beta} = -f^\alpha_\beta J^\beta$$

と書ける。これを見ると簡潔になったように見えるが、その分 $T^{\alpha\beta}, f_{\alpha\beta}, J^\alpha$ の定義が複雑になっているのである。電磁場と質点系とを合わせたエネルギーと運動量の保存の式をテンソル形式で書くと

$$\partial_\beta (T^{\alpha\beta}(\text{電磁場}) + T^{\alpha\beta}(\text{質点系})) = 0$$

となる。

第II部

一般相対論の概要

第3章

序

相対論の物理的主張というのは等価原理と重力場の方程式であると言っていいだろう。それと特殊相対性原理と光速不変の原理である。この章では慣性系の原因を考察し、興味ある状況を思考実験で考察して、幾つか仮説を立てた。幾つかの仮説は直後で否定もされている。その後等価原理・一般相対性原理を簡単に考察した。

3.1 慣性系の原因

一般相対性理論は「慣性系はどういう原因で生じるか」ということを説明しようとした理論である。ニュートン力学では慣性系とは恒星固定系のことである。もちろん、それに対して等速直線運動している系も慣性系である。地球から見ると恒星同士の位置関係はいつまでも変わらないように見える。つまり、どの恒星2個をとってもその2つと地球との角度は変わらないように見える(図3.1)。まず恒星固定系の条件として「その恒

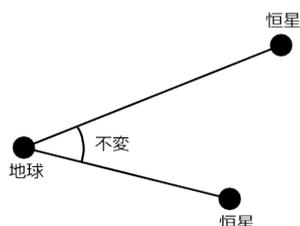


図 3.1

星群が回転していないように見える座標系」でなければならない。例えば図3.2のように極座標を設けたら、恒星の角度 θ, ϕ は変わらないような座標系のことである。さらに「太陽系の重心*1に対して静止しているか、

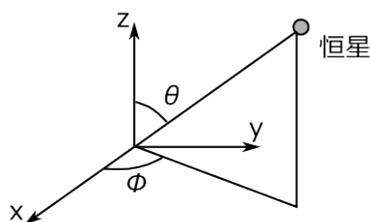


図 3.2

又はそれに対して等速直線運動している系」がもう一つの恒星固定系である。しかしながら恒星は実は猛烈な速さで互いに動いている (図 3.3)。だから図 3.1 のように角度が不変なのはもちろん測定時間が短いことと恒星が地球から遠いことが原因である。さて上記 2 つの条件を満たしている系を慣性系とみなして惑星の運動を

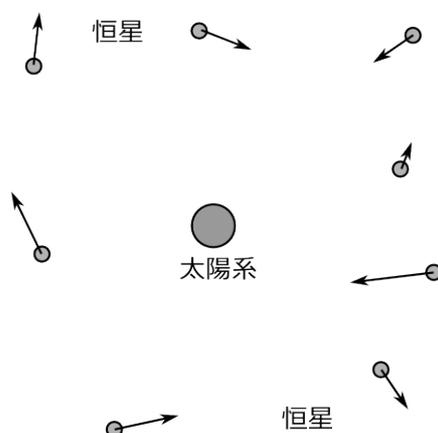


図 3.3

計算すると観測事実と合うわけである*2。だから実用上はこれで十分なのである。

しかしながら、いったいなぜ「恒星系に対して回転していない系で、かつ太陽系重心に対して静止している系」が慣性系になるのだろうか。恒星系ではなく木星系ではダメなのだろうか、太陽系重心でなく水星重心ではダメなのか。ニュートン力学ではそれに対してなんの説明もないのである。ただ

仮説 I 恒星系の大きな質量が慣性系の理由になっている

のではないかという想像はつく。そしてその大きな質量系に対して回転せず、その大きな質量系に対して太陽系は自由落下していることが慣性系の原因ではないかとは想像はできる。

(思考実験と仮説)

1 つの思考実験してみよう。これはアインシュタインの論文 [4] にあるものをアレンジしたものである。図 3.4 のように全く同じ物質でできた質量も等しい 2 つの球があるとす。そしてこの球以外に物質はないとする。恒星も太陽もないのである。一方の球が他方の球に対して、2 つの球の中心を通る直線を軸として回転しているとしよう。このとき、球の表面ではいかなる力が存在するか。恒星も太陽もないのでどちらが慣性系だとは言えないのである。しかし、対称性から、どちらの表面でも同じ量の遠心力が働くということは想像できる。一方の球の回転運動が他方に遠心力を生じさせたのだから

仮説 II まわりの物質の運動は力を生じさせる

*1 太陽は重いので実質的には太陽の重心

*2 元々はケプラーは太陽を座標の原点にして向きは恒星群でとったわけである。そしてその座標系の観測データを使ってニュートンが引力の逆 2 乗則を導き出したわけである。

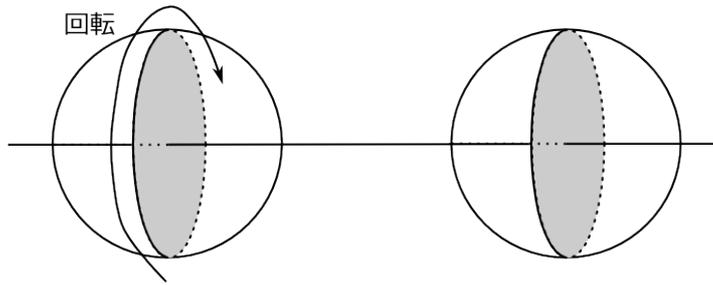


図 3.4

ということができるかもしれない。これは磁石の運動が電場を生むということに似ている。

さて、次に図 3.5 のように一方の球の体積を密度一定にして大きくしていったらどうなるだろうか。おそらく大きい方の表面では遠心力は弱くなり、大きさの変わらない方は遠心力が大きくなるであろう。そう考える 1 つ目の根拠としては、仮説 I で述べたように、大きな質量が慣性系の原因と想像できるので大きな球に固定された系はより慣性系に近づくとも推測できるからである。もう 1 つの根拠は、

仮説 III 物質の運動が生む力の大きさは、運動している物質の量と速度が大きくなると大きくなり、運動している物質が遠くなると小さくなる

である。これは磁石の運動が電場を作ることからの類推である。磁石を 2 個にすれば電場は 2 倍になり、磁石の速度を 2 倍にすれば電場は 2 倍になる。そして磁石が遠ざかれば力は弱くなるからである。大きい方の球の表面では、その面から見て運動しているもう一方の球は遠くなる。だから力は弱くなる。小さい方の球の表面では、その面から見て運動しているもう一方の球は大きくなる。そして半径の増大により、角速度が同じでも速度が大きくなる。よって力は強くなるというわけである。

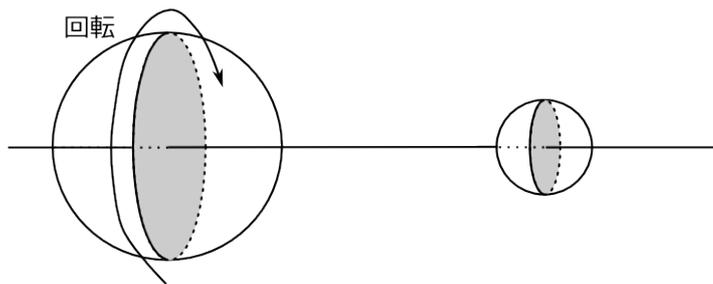


図 3.5

さてもう 1 つ思考実験をしよう。ニュートン力学のいう慣性系で、バケツに水を入れて回転させるとしよう。すると遠心力によりバケツのふちでは水が盛り上がる。先ほどの仮説 I の「物質の運動は力を生む」の考えだと、バケツに対して恒星系が回転したので遠心力が生じたと言える。ただこの仮説には欠点がある。バケツが回転した途端に遠心力が生じる。つまり恒星系が回転した途端に力が生じる。恒星は速いので恒星の運動の情報がバケツに届くまでそれなりに時間がかかるはずである。しかし力が瞬時に伝わるのはおかしいのではないかということである。

もう1つ欠点がある。例えば恒星系から非常に遠い慣性系を考える。そこで同じようにバケツを回転させても同じだけ遠心力が働くであろう。これはニュートン力学の主張するところである。すると運動する物質である恒星系から遠くなると力が弱くなるという仮説 III に反することになってしまう。

さらにもう1つ思考実験をしよう。図 3.6 のようにもしバケツの回転軸を変えても、力の向きはおそらくバケツの向きに応じて変わるであろう。しかしバケツから見て恒星系の運動は全く異なるのである。物質の運動が力を生むなら、力の有り様も変わるはずである。

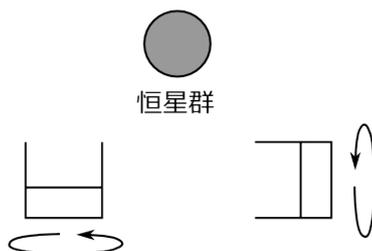


図 3.6

以上のことから考えて物質の運動が力を生むという仮説 II とそれに関連した仮説 III はおかしいのではないと言える。そうではなく

仮説 IV 物質は周りの空間に慣性場というものを出している

のではないだろうか。これが私の考えである。慣性場というのは自分で書いておきながら、うまく説明できないのだが、物質が慣性場を出すとは、その物質に対して回転していない系が慣性系により近くなるという情報を出しているというようなどこである。つまり例えば恒星系はこれに対して回転していない系を慣性系にしているわけで、そういう情報を空間に放出しているということである。これは当然、後で述べる計量テンソルと関係あるはずだが、その計量テンソルとの関係は今のところ全くわからない。

もう一つ思考実験しよう。図 3.7 のように大きな質量に対して回転している質点を考える。大きな質量に対して固定された系から見ると、この質点には遠心力が働くであろう。その原因は大きな質量の微小部分がそれぞれ慣性場を発生しているからであると考えられる。つまり素粒子 1 つ 1 つが慣性場を作っているのである。しかしそう考えると

仮説 V 素粒子といものは球対称でなく向きがある

と言わざるをえなくなる。というのは 1 つ 1 つの素粒子に向きがないなら、その素粒子にとって回転している質点というものは円を描いているのでなく単振動しているだけだからである。つまり向きというものがないと、情報は距離だけになるということである。しかしながらその素粒子に対して距離が変わらないような地点に質点がいっても同じように遠心力が働く。だから素粒子は向きを持っていると推測できるわけである。

以上いろいろとニュートン力学の欠点や疑問を述べてきたわけだが、これらに対して一般相対論は解答を与えてくれるはずである。さて一般相対論は「慣性系はどういう原因で生じるか」ということに形式的には答を与えてくれているようである。計量テンソル $g_{\alpha\beta}$ が $\eta_{\alpha\beta}$ でその微分が 0 のとき、そこは慣性系となるのだが、

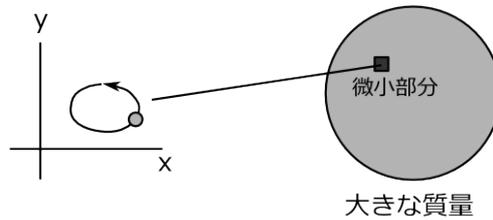


図 3.7

$g_{\alpha\beta}$ は周りの物質の位置と運動によって決まるからである。決して恒星や太陽が原因になることはなく、質量、エネルギーなど物理的なものが原因になるのである。

3.2 等価原理・一般相対性原理

まず慣性系の定義だが、

【慣性系】電磁力などのいわゆる重力以外の力を受けていないとき、すべての物体が直線運動する系を慣性系という

この定義では地球に固定された座標系は慣性系とは言えない。すべての物体が放物運動するからである。自由落下系が慣性系である。ニュートン力学とは慣性系の定義が異なるのである。

(等価原理)

この慣性系の概念を使って有名な等価原理を述べよう。

等価原理には2つの物理的な主張がある。

1. どんな時空点でも局所的には慣性系となる座標を作れる。
2. 慣性系では特殊相対論のところで述べた電磁気学の法則が成り立つ。

この原理は実験で検証すべき物理法則である。決して自明なことではない。1は自明のように見えるがそうでもない。地球上では物体の種類や質量、速度によらず重力加速度は一定である。これはニュートンの重力法則が主張するところであり、実験事実でもある。これを自由落下系から見れば加速度は打ち消されて、すべての物体は直線運動をする。これが自由落下系が慣性系となる根拠であろう。しかし自由落下系が慣性系ということになると、地球上というのは慣性系ではないということになる。となると地球上での加速度と言うのは一体どうやって測ったのだろうか。地球上の時間というものはどうやって測ったのだろうか。つまり加速度というもの自体の意味が明確でなくなる。だから地球上で重力加速度が一定だからというのは根拠稀薄になってしまうのである。私は等価原理というのは決して自明なものでなく思い切った飛躍のある主張だと思っている。そして実際に成り立っている物理法則だとも思っている。

さて2だが、どの慣性系でも、例えそれが自由落下系であろうと他の物質から遠く離れた系であろうと、電磁気学の法則は同じだと主張しているのである。そしてその電磁気学の法則は特殊相対論の項で説明した法則だと言っているのである。このことから重力による光の屈折が導かれるのである。

さて又1に戻ろう。慣性系は局所的にしか存在しない。というのは重力が場所によって異なるからである。例えば球体が重力源の場合、重力は中心に向かう。すると、自由落下系で箱の中心で物体が静止するとして、箱のすみでは図3.8のように中心上方向に加速度を持ってしまうのである。こういう理由で慣性系は局所的にしか取れないのである。これからわかるように慣性系というのは領域が無限小の極限で成り立つものなのである。慣性系というのは一種の数学的理想化の上で成り立つ概念であり、有限領域では慣性系というものはない。これは後でも述べるが局所慣性系でも自由粒子の運動の軌跡を3点取ると、決して直線にはならない。3点の距離を0に近づける極限で直線になるのである(図3.9)。

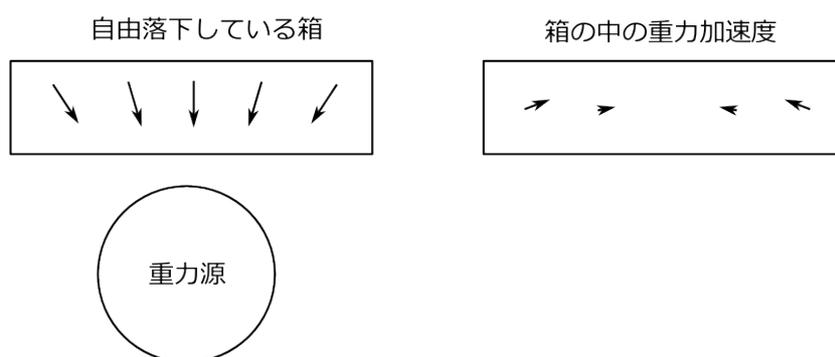


図3.8 左図の矢印は重力源から見た重力加速度。右図の矢印は自由落下系から見た重力加速度。重力加速度は中心から外れるに従って徐々に増えていくと考えられる。このことが後に見る局所ローレンツ系では $\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial X^\gamma} = 0$ の根拠である。



図3.9 自由落下系から見た、自由粒子の軌跡

今後局所ローレンツ系という用語をしばしば使う。局所ローレンツ系は局所慣性系とほぼ同義語だが、局所慣性系という自由落下する箱のような物体の運動状態の意味合いが強いが、局所ローレンツ系というとその箱での直交座標の意味合いが強いのと思っていただきたい。似たような用語を使うのは、局所慣性系である自由落下する箱の中にも曲がった定規で曲線座標を作ってしまうからである。

(一般相対性原理)

一般相対論では等価原理の他に一般相対性原理という主張がある。これは、すべての系で物理法則は等しいという主張である。これは間違った主張だと思う。物理法則が等しいとは一体どういう意味だろうか。それは同じことが起きるということである。又は同じ初期条件を与えれば、その後は同じである。と言ってもよい。同じ現象のコピーが存在することなのである。特殊相対論では、任意の慣性系で同じことが起きるように電磁場の定義を修正したのである。ところで一般相対論では非慣性系にまで扱う領域を拡張したので、状況が異なるのである。だから同じ現象が起きることはありえないのである。慣性系と非慣性系では現象が異なることは自明であろう。不変距離に用いる時間距離は慣性系で定義する。質量や電荷も慣性系で定義すると思われる。慣性系は特別な座標系であり、どの座標系も同等ということは決してない。

第 4 章

自由粒子と光の運動方程式

この章では重力場中での自由粒子の運動及び光の運動方程式を導出する。自由粒子というのは重力以外の力を受けていないという意味である。局所ローレンツ系から一般座標への物理法則の記述の変換に便利のために共変微分というものを導入する。それから自由粒子の運動方程式を近似的に簡略化する。

4.1 局所ローレンツ系座標の作り方

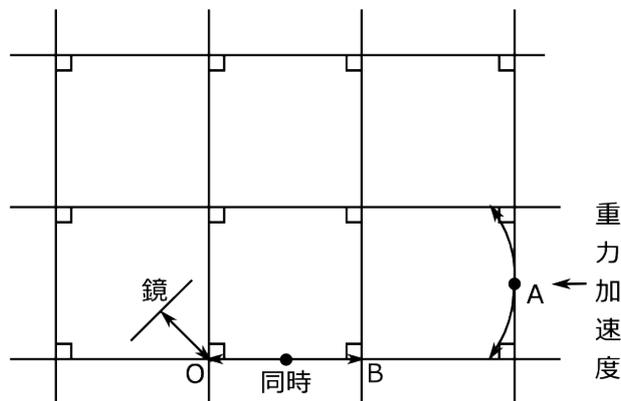


図 4.1

局所ローレンツ系座標の作り方を考えよう。節 3.2 の図 3.8 のような自由落下している箱の中に具体的に局所ローレンツ系座標を作ってみよう。箱の中心では重力加速度はないとする。しかし中心から離れると、重力加速度が現れるということに注意しよう。まず空間座標の設定だが、これは単に図 4.1 のように剛体上に定規で直線を引き、それに直角に直線を引くというだけである。特殊相対論の本質的なことだと思うのだが、特殊相対論では時間というものを光の移動距離で測っている。慣性系での時間の測定法について簡単に触れておこう。

空間上の同じ点での事象の時間差について：点 A で異なる時間に起きた事象をそれぞれ α 、 α' としよう (図 4.2)。点 A の近くに鏡を置く。 α が起きたとき、光を鏡に向けて発し、鏡の位置は光が A に戻ってきたときにちょうど事象 α' が起きるようにする。このときの A と鏡との距離の 2 倍を光速 c で割ったものが事象 α

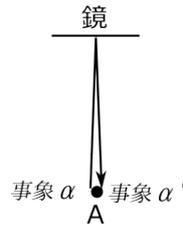


図 4.2 空間上の同じ点での事象の時間差の測り方

と事象 α' の時間差である。

空間上の異なる点での事象の時間差について：空間上の点 A でのある事象を α 、空間上の点 B でのある事象を β としよう (図 4.3)。事象 α が起きたとき、光を点 B に向かって発する。事象 β が起きたときも、光を点 A に向かって発する。もし A からの光が B に付く前に B から発せられた光とぶつかれば、点 A とその点との距離から、点 B からその点の距離を引いて光速 c で割れば、それが事象 α と事象 β の時間差である。もし B に着いたとき、まだ事象 β がまだ起きていなければ、光が B に着いてから事象 β が起きるまでの時間は、最初述べた鏡の方法で測れば良い。(慣性系での時間の測り方は論文「光の軌跡の変換としてのローレンツ変換」[1] を参照して欲しい。)

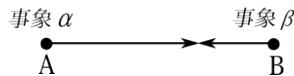


図 4.3 空間上の異なる点での事象の時間差の測り方

局所ローレンツ系の場合も完全な慣性系の時と同様、光の移動距離で測る。ある空間上の同一点での時間はその点で図 4.1 のように光を鏡で反射させて往復させればよい。鏡の位置はできるだけその点に近づけたほうが良い。というのは箱の中心から離れるほど重力加速度が現れ、光が屈折してしまうからである。問題は異なる空間上の点での時間差をいかに測るかである。これは同一点での時間の測り方は決まっているので、座標を作るという意味では空間上の異なる点での同時を決めるということでもある。図 4.1 のように空間上の 2 点 O と B の同時を決めるには、2 点の midpoint から光を発し、それぞれ O と B についた事象が同時である。そうすれば空間上の異なる点での同時を決められるのだが、問題は中心から離れると重力加速度が現れてしまい、例えば図 4.1 の点 A では光が屈折するという事である。このことから、おそらく図 4.4 で O から経路 1 で A の同時と O から経路 2 を通っての A の同時は同時でなくなると思う (図では、光の軌跡を直線で描いているが、実際は重力加速度のために曲線になる。)。このことを証明する方法が今の私にはわからないのだが、おそらくそうなるであろう。このことがいわゆる時空が曲がっているということの意味だと思う。このことは要は図 4.5 のように O で発した光が T で衝突するとき、完全な慣性系では光の移動距離は等しいが、局所ローレンツ系では異なるということなのである。だから今のように

たとえば光の移動距離で時間を測っても連続的な座標は作れない。

だから連続的な座標を作るには何らかの微調整のようなものをしなければならないのである。だから局所ローレンツ座標というのも時間を光の移動距離で測ったものとは完全に同じなのではなく、それを少し微調整して

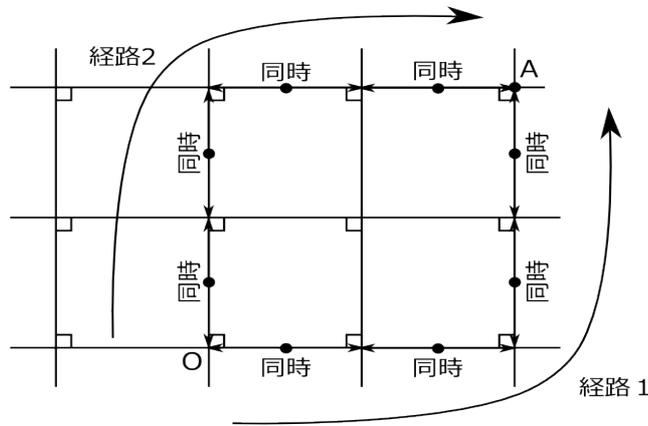


図 4.4

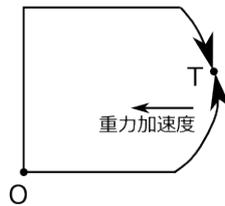


図 4.5

連続になるようにしたものと思ってもらいたい。だからと言って一般相対論では事象間の時間が、光の移動距離とは異なるものだとは考えないでもらいたい。いい例ではないかもしれないが、例えとして球の表面を考えてもらいたい。球の表面で定規を使って直交座標を作ろうとすると、うまく作れない。図 4.6 のように点 O から 1cm 進み、点 1 に着き、そこから今きた方向に直角に 1cm 進んで点 2 に着いたとしよう。点から最初進んだのとは直角方向に 1cm 進み、点 3 につき、そしてそこから直角方向に 1cm 進んで点 4 に着いたとしよう。このとき球面では点 2 と点 4 は同じにならない。定規で直交座標が作れないからと言って、球面の距

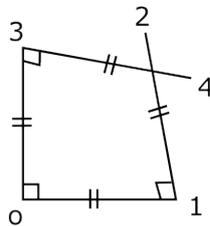


図 4.6 球面上で正方形は描けない。

離が定規というもので測れないというわけではないのと同様、光の移動距離で連続的な座標を作れないからと言って、光の移動距離で時間を測れないというわけではないのである。球面での距離は 2 点間が無限に近いときに距離としての意味を持つ。同じように局所ローレンツ系において、時間は光の移動距離が無限小の極限の

ときのみ時間としての意味を持つ（ただ光の移動距離はある系でいくら小さくても他の座標系に行けばいくらでも大きくなってしまふことに注意。このことも今後の課題として明確にしたい。）。数学的モデルとしては局所ローレンツ系というのは完全なローレンツ系との差が変位に関して2次の無限小ということである。球面では先の例で距離1cmだったのを無限に小さくしていけば点2と点4の差はそれよりも高位の無限小だということである。つまり点2と点4の距離を点0と点1の距離で割った値は、点1と点0の距離を無限小に持っていくと、0になるということである。光の場合なら図4.7のように空間に正方形ABCDをつくり光をAから

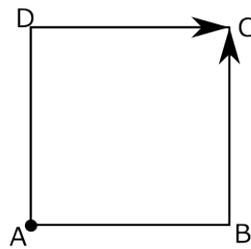


図 4.7 A で光を同時に発しても C に着くのは同時ではない

同時に B と D に向けて発し、一方は B で反射させて C につく、もう一方は D で反射させて C に着く。到着の時間差は AB を無限小に持っていくと AB よりも高位の無限小であるということ。つまり C での時間差を AB の距離で割った値は、AB を 0 に持っていく極限で 0 になるということである。これは一種の数学的モデルである。われわれが地球上で今のような実験をしても C で時間差など観測できないほど小さいであろう。

さて、次にいわゆる一般座標というものについて考えてみたい。一般相対論では連続的な座標なら何でもよいということになっている。それが一般座標である。今述べたように光の移動距離で時間を測っても連続的な座標は作れないので一般座標でも当然数学的的技巧が入ってくる。しかしながらこの座標というものは必ず物理的に意味がわかるものでなければならない。意味がわかるというのは万人に対して、この粒子の位置が何々、時間が何々だと言え、その位置、時間がわかるということである。より根源的に言えば、我々の感覚に対応したものでなければならない。そうでないと例えば重力源となるエネルギー運動量テンソルと言うものを測ることができないであろう。ところがそれが無いのがシュバルツシルト座標なのである。この座標では重力源はどうやって測ったのであろう。座標の意味もないのに中心に球対称な質量があるとはいったいどういう意味なのだろうか。いったい我々が地球上で使っている座標系というものは、どういうものなのだろうか。空間的なものはいとして時刻を電波時計で合わせるのはどうなのか。電波時計で時間を合わせれば連続的な時間座標は作れないであろう。逆に一箇所で時刻を合わせて、それを四方八方に運んでもらえれば連続的な時刻は作れよう。我々が地球上で使っている座標は時刻がガタガタで不連続なのだが、実用上はそれで十分なのである。この一般座標の意味が不明確なところは一般相対論の弱点だと思う。局所ローレンツ座標も明確とは言えない。今後の理解に期待したい。

4.2 計量テンソル

さて、計量テンソルなるものを導入しよう。局所ローレンツ系での事象間の無限小変位 ΔX^α による不変距離 ds

$$ds^2 \stackrel{\text{def.}}{=} -(\Delta X^0)^2 + (\Delta X^1)^2 + (\Delta X^2)^2 + (\Delta X^3)^2$$

というものを定義する。 ΔX^0 は時間座標で、これは 2 つの事象間の光の移動距離のことである。 $\Delta X^1, \Delta X^2, \Delta X^3$ は空間座標で 2 つの事象間の差は単に今作った剛体上の座標である。ただこの事象間の差は無限小でなければならない。そうでないと、この系に対して並進している系も局所慣性系、それを X' 系とすると

$$\eta_{\alpha\alpha} dX^\alpha = \eta_{\alpha\alpha} dX'^\alpha$$

とならないからである。一般座標 x 系でこの不変距離を表すと

$$ds^2 = \eta_{\alpha\alpha} \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\nu} dx^\mu dx^\nu$$

となる。計量テンソル $g_{\mu\nu}$ を

$$g_{\mu\nu} \stackrel{\text{def.}}{=} \eta_{\alpha\alpha} \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\nu}$$

と定義すれば不変距離は x 系で

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

とあらわせる。計量テンソルは 2 つの反変ベクトルとスカラーの比例定数なので 2 回共変テンソルとして変換する。局所ローレンツ系では計量テンソルは定義より

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$$

である。そして、その微分も

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial X^\gamma} = 0$$

である。こうなる理由なのだが、計量テンソルはその点での重力加速度の関数と考えられる。そして重力加速度は図 3.8 の右図のように中心から離れるに従って徐々に現れると考えられる。つまり重力加速度の変位による微分は 0 と考えて良いであろう。だから計量テンソルの変位による微分も 0 になるのである。記号的に書けば、 a を重力加速度とすると、計量テンソルの変位による微分は

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial X^\gamma} = \frac{\partial a}{\partial X^\gamma} \frac{dg_{\alpha\beta}}{da}$$

であり、 $\frac{\partial a}{\partial X^\gamma} = 0$ なので計量テンソルの変位微分も 0 になるということである。ただ非慣性系での加速度の意味など、何か不明確な感じはする。

ここで注意して欲しいのだが計量テンソルというのを導入したからと言って何か新たな物理法則を述べているわけではないということである。ニュートン力学でも計量テンソルというのを導入したっていいのである。ただその利点がないというだけの話である。

4.3 自由粒子と光の運動方程式

重力場中の自由粒子と光の運動方程式を導出する。自由粒子と言うのは重力以外の力が働いていないという意味である。以下の説明では粒子の運動という記述をするが、それは基本的には光にも当てはまるので、そう思って読んでほしい。まず局所慣性系での粒子の運動を考える。それを一般座標系へ変換する。局所慣性系での座標を X^α と書こう。事象点 1 では重力は完全に消し去られているとしよう。質点が事象点 1 から点 2、そして点 3 へ移動したとしよう。点 1 から点 2 への変位を ΔX_1^α 、点 2 から点 3 への変位を ΔX_2^α と書こう。質点が事象点 1 から移動すると重力が現れてしまうので、図 4.8 のように 空間軌道は曲線を描く。しか

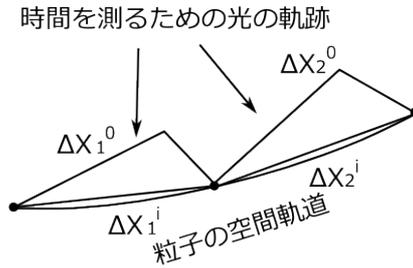


図 4.8 局所慣性系での粒子の軌道。光の軌道は事象間の時間を測るためであり、この移動距離を c で割った値が事象間の時間である。

し点 1、2、3 の距離を 0 に持って行く極限では ΔX_1^α と ΔX_2^α は ΔX_1^α より高位の無限小を無視すれば比例するであろう。すなわち

$$\lim_{\Delta X \rightarrow 0} \Delta X_1^0 : \Delta X_2^0 = \Delta X_1^1 : \Delta X_2^1 = \Delta X_1^2 : \Delta X_2^2 = \Delta X_1^3 : \Delta X_2^3 \quad (4.1)$$

となるであろう。そこで、この系では点 1、2、3 の事象間の不変距離を十分小さくにとって（これは光の場合問題がある。光の場合は常に事象間の距離は 0 である。）2 つの変位を等しくなるようにする。すなわち

$$\Delta X_1^\alpha = \Delta X_2^\alpha$$

としよう。もちろん等しいと言っても ΔX_1^α より高位の無限小を無視してのことではある。それで添字を書くのが面倒なので ΔX_1^α も ΔX_2^α も ΔX^α と書くことにする。

さてこの変位を図 4.9 のように別のいわゆる一般座標 x 系に変換しよう。最初の変位の変換は

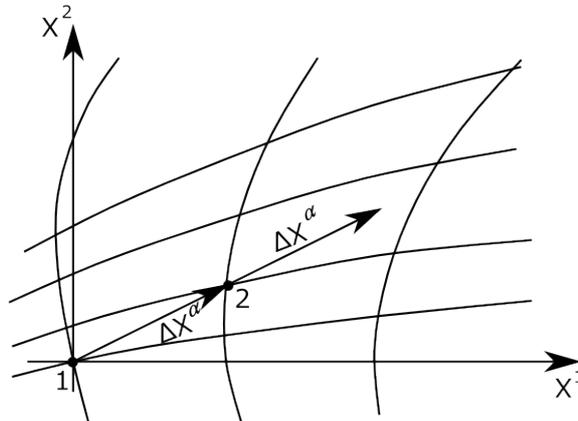


図 4.9

$$\Delta x_1^\mu = \left. \frac{\partial x^\mu}{\partial X^\alpha} \right|_1 \Delta X^\alpha \quad (4.2)$$

ここで $\left. \frac{\partial x^\mu}{\partial X^\alpha} \right|_1$ は点 1 での変換行列 $\frac{\partial x^\mu}{\partial X^\alpha}$ の値のことである。次のステップでは変換行列が変わって

$$\Delta x_2^\mu = \left. \frac{\partial x^\mu}{\partial X^\alpha} \right|_2 \Delta X^\alpha \quad (4.3)$$

となる。 ΔX^α は最初のステップも次のステップでも同じなのは最初に述べたとおりである。 $\frac{\partial x^\mu}{\partial X^\alpha}$ は当然連続なので Δx の 1 次の近似で

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial X^\alpha} \Big|_2 = \frac{\partial x^\mu}{\partial X^\alpha} \Big|_1 + \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial X^\alpha} \Big|_1 \Delta x_1^\nu \quad (4.4)$$

と展開できる。これを (4.3) に代入し、 $\Delta X^\alpha = \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\sigma} \Big|_1 \Delta x_1^\sigma$ を使うと

$$\Delta x_2^\mu = \Delta x_1^\mu + \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial X^\alpha} \Big|_1 \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\sigma} \Big|_1 \Delta x_1^\nu \Delta x_1^\sigma \quad (4.5)$$

となるわけである。さて

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial X^\alpha} \right) \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\sigma} = - \frac{\partial x^\mu}{\partial X^\alpha} \frac{\partial^2 X^\alpha}{\partial x^\nu \partial x^\sigma} \quad (4.6)$$

である。これは

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial X^\alpha} \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\sigma} = \delta_\sigma^\mu$$

の両辺を x^ν で微分すれば直ちに出てくる。そして次の定理が成り立つ

定理 1 X 座標系はある着目点で局所ローレンツ系だとする。すると

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial X^\alpha} \frac{\partial^2 X^\alpha}{\partial x^\nu \partial x^\sigma} = \frac{1}{2} g^{\mu\kappa}(x) \left(\frac{\partial g_{\sigma\kappa}(x)}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\kappa\nu}(x)}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial g_{\nu\sigma}(x)}{\partial x^\kappa} \right)$$

X 座標系がある着目点で局所ローレンツ系であるとは、その点で

$$g_{\alpha\beta}(X) = \eta_{\alpha\beta} \quad \frac{\partial g_{\alpha\beta}(X)}{\partial X^\gamma} = 0 \quad (4.7)$$

という意味である。尚、数学的には局所ローレンツ系の $g_{\alpha\beta}$ は $\eta_{\alpha\beta}$ である必要はなく対角成分が 1 か -1 の対角行列であればよい。すべて -1 でもよいのである。それは証明を見てもらえればわかる。証明は丹念に計算すればいいだけである。

【証明】

$$g_{\sigma\kappa}(x) = \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\sigma} \frac{\partial X^\beta}{\partial x^\kappa} g_{\alpha\beta}(X)$$

なので

$$\frac{\partial g_{\sigma\kappa}(x)}{\partial x^\nu} = \frac{\partial^2 X^\alpha}{\partial x^\nu \partial x^\sigma} \frac{\partial X^\beta}{\partial x^\kappa} g_{\alpha\beta}(X) + \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\sigma} \frac{\partial^2 X^\beta}{\partial x^\nu \partial x^\kappa} g_{\alpha\beta}(X) + \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\sigma} \frac{\partial^2 X^\beta}{\partial x^\kappa} \frac{\partial X^\gamma}{\partial x^\nu} \frac{\partial g_{\alpha\beta}(X)}{\partial X^\gamma}$$

着目点では式 (4.7) より

$$\frac{\partial g_{\sigma\kappa}(x)}{\partial x^\nu} = \frac{\partial^2 X^\gamma}{\partial x^\nu \partial x^\sigma} \frac{\partial X^\gamma}{\partial x^\kappa} \eta_{\gamma\gamma} + \frac{\partial X^\gamma}{\partial x^\sigma} \frac{\partial^2 X^\gamma}{\partial x^\nu \partial x^\kappa} \eta_{\gamma\gamma}$$

となる。 ν, σ, κ を巡回させると同様に

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{\kappa\nu}(x)}{\partial x^\sigma} &= \frac{\partial^2 X^\gamma}{\partial x^\sigma \partial x^\kappa} \frac{\partial X^\gamma}{\partial x^\nu} \eta_{\gamma\gamma} + \frac{\partial X^\gamma}{\partial x^\kappa} \frac{\partial^2 X^\gamma}{\partial x^\sigma \partial x^\nu} \eta_{\gamma\gamma} \\ - \frac{\partial g_{\nu\sigma}(x)}{\partial x^\kappa} &= - \frac{\partial^2 X^\gamma}{\partial x^\kappa \partial x^\nu} \frac{\partial X^\gamma}{\partial x^\sigma} \eta_{\gamma\gamma} - \frac{\partial X^\gamma}{\partial x^\nu} \frac{\partial^2 X^\gamma}{\partial x^\kappa \partial x^\sigma} \eta_{\gamma\gamma} \end{aligned}$$

となる。この3つを合わせると

$$\frac{\partial g_{\sigma\kappa}(x)}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\kappa\nu}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\kappa} = 2 \frac{\partial X^\gamma}{\partial x^\kappa} \frac{\partial^2 X^\gamma}{\partial x^\sigma \partial x^\nu} \eta_{\gamma\gamma}$$

となる。ところで、着目点では

$$g^{\mu\kappa}(x) = \frac{\partial x^\mu}{\partial X^\lambda} \frac{\partial x^\kappa}{\partial X^\lambda} \eta^{\lambda\lambda}$$

である。これが $g_{\mu\kappa}(x)$ の逆行列になっていることは容易にわかる。だから

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} g^{\mu\kappa}(x) \left(\frac{\partial g_{\sigma\kappa}(x)}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\kappa\nu}(x)}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial g_{\nu\sigma}(x)}{\partial x^\kappa} \right) &= \frac{\partial x^\mu}{\partial X^\lambda} \frac{\partial x^\kappa}{\partial X^\lambda} \eta^{\lambda\lambda} \frac{\partial X^\gamma}{\partial x^\kappa} \frac{\partial^2 X^\gamma}{\partial x^\sigma \partial x^\nu} \eta_{\gamma\gamma} \\ &= \frac{\partial x^\mu}{\partial X^\lambda} \delta_\lambda^\gamma \frac{\partial^2 X^\gamma}{\partial x^\sigma \partial x^\nu} \eta^{\lambda\lambda} \eta_{\gamma\gamma} \\ &= \frac{\partial x^\mu}{\partial X^\gamma} \frac{\partial^2 X^\gamma}{\partial x^\sigma \partial x^\nu} \end{aligned}$$

となる。【証明終】

接続係数 $\Gamma_{\nu\sigma}^\mu(x)$ というものを導入しよう。というのはこの量がよく出てくるので省略記号があると便利だからである。

$$\Gamma_{\nu\sigma}^\mu(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{2} g^{\mu\kappa}(x) \left(\frac{\partial g_{\sigma\kappa}(x)}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\kappa\nu}(x)}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial g_{\nu\sigma}(x)}{\partial x^\kappa} \right)$$

この記号を使うと式(4.6)と定理1より、

$$\Gamma_{\nu\sigma}^\mu(x) = \frac{\partial x^\mu}{\partial X^\alpha} \frac{\partial^2 X^\alpha}{\partial x^\nu \partial x^\sigma} = - \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial X^\alpha} \right) \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\sigma} \quad (4.8)$$

となる。だから式(4.5)は

$$\Delta x_2^\mu = \Delta x_1^\mu - \Gamma_{\nu\sigma}^\mu(1) \Delta x_1^\nu \Delta x_1^\sigma \quad (4.9)$$

と書ける。次へのステップだが同じ繰り返しを考える。ただ次のステップは別の慣性系で考えなければならない。そうやって重力を消すのである。 Δx_3^μ は

$$\Delta x_3^\mu = \Delta x_2^\mu - \Gamma_{\nu\sigma}^\mu(2) \Delta x_2^\nu \Delta x_2^\sigma$$

となる。以後同じである。このように自由粒子の運動が記述できるわけである。 $\Gamma_{\nu\sigma}^\mu$ がこの座標系での値であることに注意しよう。今の説明は光でもあてはまる。だから、自由粒子と光の運動方程式は n 番目の変位を Δx_n と掛ければ

$$\Delta x_{n+1}^\mu - \Delta x_n^\mu + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu(x_n) \Delta x_n^\nu \Delta x_n^\sigma = 0 \quad (4.10)$$

となる。質点の場合は固有時間の自乗で割って

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu(x) \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0 \quad (4.11)$$

としてもよい。光の場合は固有時間は0なので、固有時間で割ることはできない。だから(4.10)のままでもいいのである。パラメーターなど使う必要はないと思うがそこらへんの注意点は重力場中の光の湾曲を計算した節7.2を見てもらいたい。

4.4 平行移動・共変微分

今から共変微分なるものを導入する。一般相対論では慣性系以外の座標を使う。その座標系での物理法則は慣性系からの座標変換によって記述される。そのために便利な概念記号を導入しようと言うのである。これは簡単に言えば、慣性系の微分を座標変換したものである。こういうことをする理由は慣性系での法則を一般座標に変換するからに他ならない。座標をローレンツ座標に限らず、任意の曲線座標を考える場合ベクトルの微分 $\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu}$ はテンソルとして変換しない。それは変換行列 $\frac{\partial x'}{\partial x}$ が場所によって異なるからである。場所によって基底が異なると言ったほうが物理的な言い方かもしれない。そこでテンソルになる量を導入しようというわけである。

(平行移動)

共変微分を導入する準備としてベクトルやテンソルの平行移動という概念を導入しよう。この平行という言葉が適切かどうかはわからないが、ユークリッド幾何からの類推であろう。今ある点1から無限小離れた別の点2への平行移動というものを考えよう。まず反変ベクトルの場合を考える。平行移動の考えは、2次元の

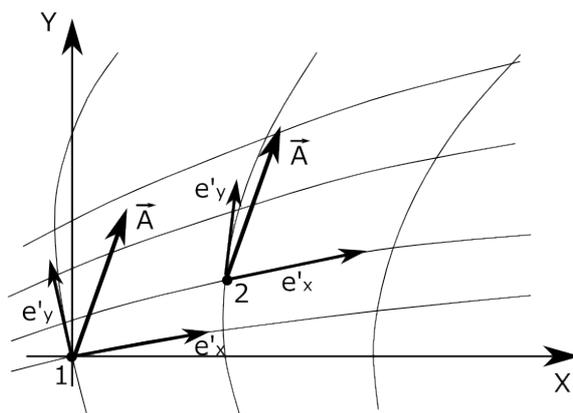


図 4.10

ユークリッド幾何と対比して考えるとわかりやすい。曲線座標では、同じベクトル \vec{A} を点1での基底で表した成分と点2の基底で表した成分は異なる (図 4.10)。そのベクトルを表す基底が異なるからである。あるベクトルを点1から無限小離れた点2へ平行移動させるとは、そのベクトルの点1での基底で表された成分を使って、そのベクトルの点2での基底での成分を表すことである。つまり点1の基底から点2の基底へ座標変換することなのである。その座標変換を、局所ローレンツ座標を経由して表そうというのが考え方である (図 4.11)。まず点1での座標系での成分を局所ローレンツ座標に変換し、さらにそれを点2の基底の座標系に変換するというわけである。今からの議論はローレンツ系というものを2次元のユークリッド幾何の直交デカルト座標に置き換えて考えてもらえればわかりやすいと思う。異なる点での基底の変換をするということは、その基底同士が互いにもう一方の基底をその基底で表せなければならない。別の言葉で言えば「異なる点での等しいベクトル」という意味がなければならない。それを局所ローレンツ系でベクトルの各成分が等しいとき「等しいベクトル」だと考えるのである。事象間の変位ベクトルについての「等しいベクトル」とは、図 4.12

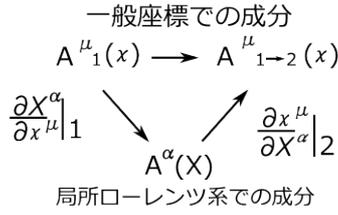


図 4.11

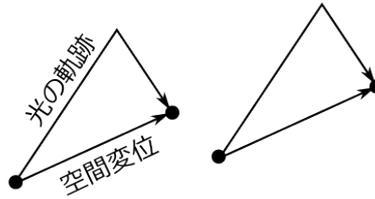


図 4.12

のように、空間的にはユークリッド幾何的な意味で平行ということであり、時間は光が同じ距離進んだという意味なのである。そしてあらゆるベクトルやテンソルは変位から作られるはずだから意味もそれに沿って考えればよいのである。ただし局所ローレンツ系でベクトルの各成分が等しいとき「等しいベクトル」だというのは異なる点の変位に関して2次以上の項を無視したときに等しいのである。これが前にも述べた局所ローレンツ系は変位の1次までは慣性系とみなしてよいということなのである。

ベクトル \vec{A} を点1での x 座標の基底で表した成分を $A_1^\sigma(x)$ と書こう。ベクトル \vec{A} を点2の x 座標の基底で表したものを $A_{1 \rightarrow 2}^\mu(x)$ と書こう。そしてそのベクトル \vec{A} を局所ローレンツ座標 X 系の基底で表した成分を $A^\alpha(X)$ と書こう。局所ローレンツ系の場合点1でも点2でも成分は（正確に言えば点1から点2への変位の2次以上の項を無視すれば）等しい。これらの成分の間には、図 4.11 のように

$$A_{1 \rightarrow 2}^\mu(x) = \frac{\partial x^\mu}{\partial X^\alpha} \Big|_2 A^\alpha(X) \quad A^\alpha(X) = \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\sigma} \Big|_1 A_1^\sigma(x)$$

の関係がある。 $\frac{\partial x^\mu}{\partial X^\alpha}$ は当然連続なので Δx の1次の近似で

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial X^\alpha} \Big|_2 = \frac{\partial x^\mu}{\partial X^\alpha} \Big|_1 + \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial X^\alpha} \Big|_1 \Delta x^\nu \quad (4.12)$$

となる。ここで Δx^ν は点1から点2への変位である。これを代入すると

$$A_{1 \rightarrow 2}^\mu(x) = A_1^\mu(x) + \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial X^\alpha} \Big|_1 \Delta x^\nu \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\sigma} \Big|_1 A_1^\sigma(x)$$

となる。式 (4.8) を使うと、

$$A_{1 \rightarrow 2}^\mu(x) = A_1^\mu(x) - \Gamma_{\nu\sigma}^\mu(x) \Delta x^\nu A_1^\sigma(x) \quad (4.13)$$

これがベクトル \vec{A} を点2の基底で表したものであり、点1の反変ベクトルを点2へ平行移動したものである。節 4.3 の自由粒子や光の運動方程式であるが、あの式 (4.10) はこの節の言葉で言えば、粒子や光の変位の平行移動の式だったのである。

(共変微分)

さて、この平行移動を使って共変微分を定義しよう。今ベクトル場 \vec{A} があり各事象点で値が与えられているとする。点2でのベクトル場の値を A_2^μ と書こう。そして A_2^μ から、点1でのベクトルを点2へ平行移動した $A_{1 \rightarrow 2}^\mu$ を引き、点1から点2への変位の Δx^ρ で割り、極限をとる。すると

$$\lim_{\Delta x^\rho \rightarrow 0} \frac{A_2^\mu - A_{1 \rightarrow 2}^\mu}{\Delta x^\rho} = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\rho} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu A^\sigma$$

となる。これが反変ベクトルの共変微分の定義である。これを新たな省略記号で

$$\nabla_\nu A^\mu \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu A^\sigma \quad (4.14)$$

書くことにする。まったく同様に考えて共変ベクトルの平行移動は

$$A_{\mu(1 \rightarrow 2)} = A_{\mu(1)} + \Gamma_{\nu\mu}^\sigma \Delta x^\nu A_{\sigma(1)} \quad (4.15)$$

となり、共変微分も同様に考えて

$$\nabla_\nu A_\mu \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \Gamma_{\nu\mu}^\sigma A_\sigma$$

となる。テンソルの場合も同様である。例えば2回反変テンソルの場合、平行移動の式は

$$A_{1 \rightarrow 2}^{\mu\kappa} = A_1^{\mu\kappa} - \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \Delta x^\nu A_1^{\sigma\kappa} - \Gamma_{\nu\sigma}^\kappa \Delta x^\nu A_1^{\mu\sigma} \quad (4.16)$$

共変微分は

$$\nabla_\nu A^{\mu\kappa} \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\partial A^{\mu\kappa}}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu A^{\sigma\kappa} + \Gamma_{\nu\sigma}^\kappa A^{\mu\sigma}$$

となる。

さて今幾何学的に平行移動を定義したが、もっと形式的に定義してもよい。共変微分をローレンツ系での微分を単にテンソルと同じ変換したものと定義するわけである。そこで反変ベクトルの共変微分を

$$\nabla_\nu A^\mu(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\partial x^\mu}{\partial X^\alpha} \frac{\partial X^\beta}{\partial x^\nu} \frac{\partial A^\alpha(X)}{\partial X^\beta} \quad (4.17)$$

と定義する。共変ベクトルの共変微分は

$$\nabla_\nu A_\mu(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial X^\beta}{\partial x^\nu} \frac{\partial A_\alpha(X)}{\partial X^\beta} \quad (4.18)$$

と定義する。この定義が式(4.14)と同じになることは前の定義のしかたの理屈の流れを追えばほぼ自明であろう。また実際計算をしてみても、式(4.8)を使えばすぐ確かめられる。さて、ここで1つ注意をしよう。ローレンツ系では共変微分はただの微分と同じであった。これはもともとローレンツ系の基底をもとに平行を定義したからである。しかし2回共変微分することはただの2回微分ではない。すなわち

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta A^\gamma \neq \frac{\partial^2 A^\gamma}{\partial X^\alpha \partial X^\beta}$$

である。平行移動のときに1から2への平行移動では成分が同じであった。しかし2回微分するからには点2から点3への平行移動も考えなければならない。そこではもはやローレンツ系ではなく成分は同じでなくなるのである。これは共変微分の式(4.14)を見てもわかる。接続係数 $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ のローレンツ座標による微分は $g_{\alpha\beta}$ の2回微分を含むのでもはや0でないのである。

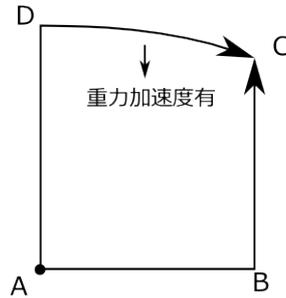


図 4.13

平行移動は経路に依存するという事に注意しよう。球面での例はどの教科書にも出ているので書かないで、光の経路について書こう。図 4.13 のように、ある系で光が空間上の点 A を出て空間上の点 B につき 90 度折れて空間上の点 C に着いたとしよう。一方もう一つ光が A を最初のとは 90 度向きを変えて出て空間上の点 D につき、そこで 90 度回って C に着いたとしよう。DC 間では図 4.13 での下向きの重力場が強く、光の軌跡は曲がるとする。すると点 C での 2 つの光の向きの差は 90 度ではなくなる。これが平行移動は経路に依存するという事の一つの例である。もちろん、今のは厳密な意味では平行移動ではなく、途中で光を 90 度屈折させているが、それは単に説明を簡潔にするためであり、経路に依存するという事の本質的なことは変わらない。

4.5 自由粒子の運動方程式の近似、計量テンソル $g_{\alpha\beta}$ と古典ポテンシャル ϕ との関係

この節では

1. 粒子の速度は光速より十分遅い
2. 重力場は弱い
3. 重力場は静的

の場合の自由粒子の運動を考える。運動方程式 (4.11)

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} = -\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} \quad (4.19)$$

を近似法で簡略化する。そして、 g_{00} と古典重力ポテンシャル ϕ との関係を導出する。重力場が弱いというのは重力加速度が小さく慣性系に近いという意味である。慣性系では $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ なので $h_{\alpha\beta} \ll 1$ とし

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} \quad (4.20)$$

としよう。運動方程式 (4.19) の右辺で粒子の速度が光速より十分遅ければ $i = 1, 2, 3$ のとき $dx^i/d\tau$ は粒子の速度とほぼ等しく、 $dx^0/d\tau$ はほぼ光速 c に等しい。だから $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ の係数が異常に添字によって変わらないかぎり $i = 1, 2, 3$ のときの $dx^i/d\tau$ は無視していいと考えられる。だから

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} \simeq -\Gamma_{00}^i c^2 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (4.21)$$

と考えるとよからう。

$$\Gamma_{00}^i = \frac{1}{2} g^{i\alpha} \left(\frac{\partial g_{0\alpha}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{\alpha 0}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\alpha} \right)$$

であり、 $g^{\alpha\beta}$ は

$$g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} \text{ の 1 次以上の項} \quad (4.22)$$

である。これは $g^{\alpha\beta}$ が $h_{\alpha\beta}$ の連続関数であり、かつ $h_{\alpha\beta} = 0$ のとき $g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta}$ となるのだから自明であろう。また重力場は静的なので ∂_0 の部分は 0。だから $h_{\alpha\beta}$ とその微分の 2 次以上の項を無視すると

$$\Gamma_{00}^i \simeq -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^i}$$

となる。粒子が遅い時は $d\tau \simeq dt$ なので、

粒子の速度は光速より十分遅く、重力場は弱く、重力場は静的な場合、自由粒子の運動方程式は

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^i} c^2 \quad (4.23)$$

となる。

一方ニュートン力学では、重力ポテンシャル ϕ 場中の運動方程式は

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\frac{\partial \phi}{\partial x^i} \quad (4.24)$$

である。比較して

$$\phi = -\frac{c^2}{2} g_{00} + \text{定数}$$

遠方極限で $\phi = 0, g_{00} = -1$ なので

粒子の速度は光速より十分遅く、重力場は弱く、重力場は静的な場合、 g_{00} と重力ポテンシャル ϕ との間には

$$g_{00} = -\frac{2}{c^2} \phi - 1 \quad \text{又は} \quad \phi = -\frac{c^2}{2} g_{00} - \frac{c^2}{2}$$

の関係がある。

第 5 章

重力場の方程式

この章では重力場の方程式について説明し、その後、この方程式がある極限ではニュートンの重力理論と一致することを見る。

ニュートンの重力理論は「重力はそれを放出する物体の運動状態に関わらず、瞬時に伝わる」と主張する。これが特殊相対性原理に反することは明らかであろう。ある慣性系で同時でも別の慣性系では過去だったり未来だったりするからである。ニュートンの重力理論を特殊相対性原理に合うように変えようとするなら、光速不変の原理のように「重力の伝わる速さは放出体の運動に依存せず一定である」と考えるのが自然であろう。これと特殊相対性原理を合わせると、ただちに重力はどの慣性系でも光速 c で伝わりと結論される。というのはどの系でも同じ速さなのは光速しかないからである。今の推論は重力以外の力にも言える。私は相対性理論の歴史には全く詳しくないのだが、特殊相対性理論が生まれてから、重力を特殊相対性原理に合うように変えようといろいろと努力がなされたようである。しかし、うまくいかなかった。全くの想像だが、アインシュタインは、慣性系というものがまわりの物体の質量と運動状態に依存するので、「慣性系の枠のなかだけで考えていては駄目なのではないか。」又、「慣性系の原因は何か。」など、いろいろと試行錯誤した末に、この重力場の方程式にたどり着いたのではないだろうか。実験を積み重ねてできたマクスウェル方程式とは違う。

5.1 重力場の方程式

重力場の方程式がどの程度正しいのかは私にはわからないが、その概要を示そう。重力場の方程式は

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\alpha\beta} \quad (5.1)$$

又は

$$R_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Tg_{\alpha\beta} \right) \quad (5.2)$$

である。この 2 つの方程式は同値である。すなわち一方が成り立てば、他方が成り立つ。この方程式の添え字を上げたものも同値である。すなわち

$$R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg^{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4}T^{\alpha\beta} \quad \text{又は} \quad R^{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Tg^{\alpha\beta} \right) \quad (5.3)$$

である。この方程式だけを見ると単純な方程式に見えるが、 $R_{\alpha\beta}$, R の定義を見ればうんざりするほど複雑な方程式だとわかる。 $g_{\alpha\beta}$ だけでこの方程式を書き下せばとてつもなく長くなる。この方程式は与えられたエネ

ルギー運動量テンソル $T_{\alpha\beta}$ に対して $g_{\alpha\beta}$ を求める方程式である。記号の定義を書いていこう。

$$R^{\alpha}_{\beta\gamma\lambda} \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\beta\lambda}}{\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma^{\rho}_{\beta\lambda}\Gamma^{\alpha}_{\rho\gamma} - \Gamma^{\rho}_{\beta\gamma}\Gamma^{\alpha}_{\rho\lambda}$$

$$R_{\alpha\beta} \stackrel{\text{def.}}{=} R^{\gamma}_{\alpha\gamma\beta} \quad R \stackrel{\text{def.}}{=} g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} \quad (5.4)$$

一見するとそうは見えないが $R_{\alpha\beta} = R_{\beta\alpha}$ と対称である。

$T^{\alpha\beta}$ は物質と電磁場のエネルギー運動量テンソルを合わせたものである。電磁場については後に式 (6.16) で示すように

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi k_1} \left(g_{\alpha\beta} f'^{\alpha\mu} f'^{\beta\nu} - \frac{g^{\mu\nu}}{4} f_{\alpha\beta} f^{\alpha\beta} \right)$$

である。物質についてはローレンツ系では式 (1.23) で示したように

$$T^{\alpha\beta} = \sum_j \bar{\rho}_j \frac{dX_j^{\alpha}}{d\tau} \frac{dX_j^{\beta}}{d\tau}$$

であった。一般座標 x 系ではこれに $\frac{\partial x^{\mu}}{\partial X^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial X^{\beta}}$ をかけて α, β で縮約したものをエネルギー運動量テンソルと定義しよう。すなわち

$$T^{\mu\nu}(x) = \sum_j \bar{\rho}_j \frac{dx_j^{\mu}}{d\tau} \frac{dx_j^{\nu}}{d\tau} \quad (5.5)$$

である。エネルギー運動量テンソルは一般座標系でもテンソルとして変換するように定義したので、テンソルとして変換する。

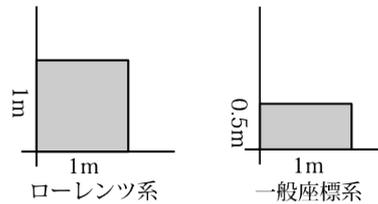


図 5.1 ローレンツ系の縦の単位を半分にすると密度は半分になる。

ここで1つ注意をしておこう。一般座標系ではエネルギー運動量テンソルの T^{00} 成分は決して普通の意味でのエネルギー密度ではないということである。そのことを示す簡単な例として、あるローレンツ系で質点は全て静止している場合を考えよう。このときの質量密度が $\bar{\rho}$ だったとする。するとこの系でのエネルギー運動量テンソルは

$$T^{\alpha\beta}(X) = \begin{cases} \bar{\rho}c^2 & \alpha, \beta = 0 \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

となる。さて、このローレンツ系での y 座標の単位だけを半分にした座標を考えよう。すなわち最初のローレンツ系ではすべての長さの単位が m だったのに、この座標では y 方向の長さの単位は 50cm とするのである。すると図 5.1 を見ればわかるようにこの系では質量密度は半分になる。だからこの系でのエネルギー運動量テンソルの $T^{00}(x)$ は元のローレンツ系の半分である $\bar{\rho}c^2/2$ だとも思えるかもしれない。しかし実際は

$$T^{00}(x) = \frac{\partial x^0}{\partial X^0} \frac{\partial x^0}{\partial X^0} T^{00}(X)$$

と変換されねばならない。時間成分は何の変化もないので $T^{00}(x) = T^{00}(X)$ である。このことは式 (5.5) を使えば

$$T^{00}(x) = \bar{\rho} \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^0}{d\tau} = \bar{\rho} \frac{dX^0}{d\tau} \frac{dX^0}{d\tau} = T^{00}(X)$$

となるので、これからも明らかであろう。だから一般座標系ではエネルギー運動量密度テンソルの T^{00} 成分は普通の意味でのエネルギー密度ではないのである。このことは一般座標での電荷密度にも言える。一般相対性原理のいうようにどの系も物理的に同等だと考えて、一般座標での T^{00} をエネルギー密度としてしまっただけなのである。

5.2 重力場を導出した思考法

いったい、全体いかにして重力場の方程式というものが出来たのかを記したい。ここでの内容は内山の本から取ったものである。ニュートン力学では重力場の方程式はポアソンの方程式

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho \quad (5.6)$$

である。この ϕ は重力場であるから $g_{\alpha\beta}$ と関係がある (節 4.5 参)。 ρ はエネルギーなので $T^{\alpha\beta}$ と関係があると想像できる。重力場の方程式としてテンソル形式が望ましい。それで重力場の方程式として

$$f^{\alpha\beta} = \text{定数} \times T^{\alpha\beta}$$

という形であると推測する。ここで

1. $f^{\alpha\beta}$ は $T^{\alpha\beta}$ が対称テンソルなので対称テンソルであり
2. $f^{\alpha\beta}$ は計量テンソルとその1階、2階微分関数とする。すなわち $g_{\alpha\beta}, \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}, \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma \partial x^\tau}$ の関数とする。2階微分までに制限したのはニュートン力学でポアソンの方程式が ϕ が2階微分だからであろう。
3. そして2階微分に関しては1次式とする。これもポアソンの方程式からの類推である。
4. そして $T^{\alpha\beta}$ の発散は0なので $f^{\alpha\beta}$ の発散も0とする。

さてこの条件を満たす $f^{\alpha\beta}$ は内山の本 [2] によると

$$a \left(R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g^{\alpha\beta} \right) + b g^{\alpha\beta}$$

のみのようだ。 a, b は定数である。この b を0とおいたのがアインシュタインの重力場の方程式

$$a \left(R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g^{\alpha\beta} \right) = T^{\alpha\beta}$$

である。 a は今の段階では決めようがない。こんな方法で導いた方程式が本当に正しい物理法則を記述しているのか本当に疑問である。重力場の方程式は地球上の実験室で確かめられるようなものではない。万有引力も効果が小さすぎて実験室で確かめることは難しいであろうが惑星の運動で確かめられる。

5.3 ニュートン力学との関係

先に示した重力場の方程式は当然にある極限でニュートンの重力理論と一致していなければならない。ニュートンの重力理論が正確に観測事実を説明し予言してきたからである。

(弱く静的な重力場)

弱く静的な重力場で粒子の速度が遅いときに、ニュートンの重力理論と一致することを見よう。弱いとは重力による加速度が小さい系と考えれば良い。重力場の方程式としては式 (5.2) の

$$R_{\alpha\beta} = \kappa \left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} T g_{\alpha\beta} \right) \quad (5.7)$$

を使う。κ は今のところ未定として、κ = 8πG/c⁴ であることは後で示す。

慣性系では $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ なので $h_{\alpha\beta} \ll 1$ として

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} \quad (5.8)$$

としよう。これを重力場の方程式に代入する。その際、 $h_{\alpha\beta}$ の 2 次以上の項は無視する。さらに $h_{\alpha\beta}$ の微分も 2 次以上の項は無視する。これは $g_{\alpha\beta}$ の変化が小さいということである。慣性系では $\partial_\gamma g_{\alpha\beta} = 0$ なので妥当な仮定であろう。

$$R_{\alpha\beta} = \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial \Gamma_{\alpha\gamma}^\beta}{\partial x^\beta} + \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda \Gamma_{\lambda\gamma}^\gamma - \Gamma_{\alpha\gamma}^\lambda \Gamma_{\lambda\beta}^\gamma \quad (5.9)$$

である。Γ_{βγ}^α に現れる $g^{\alpha\beta}$ だが

$$g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} \text{ の 1 次以上の項} \quad (5.10)$$

と表される。これは $g^{\alpha\beta}$ が $h_{\alpha\beta}$ の連続関数であり、かつ $h_{\alpha\beta} = 0$ のとき $g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta}$ となるのだから自明であろう。だから $R_{\alpha\beta}$ で $h_{\alpha\beta}$ の 1 次以下の項は (5.9) の第 1 項と 2 項のみである。すなわち

$$R_{\alpha\beta} \simeq \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial \Gamma_{\alpha\gamma}^\beta}{\partial x^\beta}$$

と近似できる。この式の α = 0, β = 0 の場合だけを扱うとしよう。重力場は静的、つまり時間に依存しないとしているので ∂₀ の項は 0 である。だから

$$\begin{aligned} R_{00} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \left[g^{\gamma\sigma} \left(\frac{\partial g_{0\sigma}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0\sigma}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\sigma} \right) \right] \\ &\simeq -\frac{1}{2} \Delta g_{00} \end{aligned}$$

となる。式 (5.7) の右辺だが重力源は光速に比べて十分遅いとして、エネルギー運動量テンソルは式 (1.25) の $T^{00} = \rho c^2$ としよう。ここで ρ は質量密度。T^{αβ} の他の成分は 0 とする。すると

$$\begin{aligned} T_{00} - \frac{1}{2} g_{00} T &= g_{00} g_{00} T^{00} - \frac{1}{2} g_{00} (g_{00} T^{00}) \\ &= \frac{1}{2} (-1 + h_{00})^2 \rho c^2 \end{aligned}$$

となる。だから重力場の方程式 (5.7) の 00 成分は

$$-\frac{1}{2} \Delta g_{00} = \kappa \frac{1}{2} (-1 + h_{00})^2 \rho c^2$$

となる。今、知りたいのは g_{00} の値であり、一番粗い近似は $\eta_{\alpha\beta}$ だが、これでは何も出てこないの、次に粗い近似はこの右辺の h_{00} を無視することである。すると重力場の方程式 (5.7) の 00 成分は

$$-\frac{1}{2} \Delta g_{00} = \frac{1}{2} \kappa \rho c^2 \quad \iff \quad \Delta g_{00} = -\kappa \rho c^2 \quad (5.11)$$

となる。今、極座標をとり原点に密度が均一な質量 M の球があるとすると、この方程式の解は、球の外では

$$g_{00} = \frac{\kappa c^2 M}{4\pi r} + \text{定数}$$

である。これを式 (4.23) の

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^i} c^2$$

に代入すると、中心方向の運動方程式は今の近似で

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{\kappa c^4 M}{8\pi r^2}$$

となる。一方古典力学では

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{MG}{r^2}$$

である。だから

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$$

とすれば、古典力学の運動方程式と一致する。つまり弱く静的な重力場で粒子の速度が遅いとき、相対性理論は古典力学と一致するわけである。このことはこの理論の正しさの十分ではないが必要条件は満たしていると言えるわけである。ついでに定数 κ の値も求まったわけである。

今の運動方程式と重力場の方程式の近似に使ったことをまとめると

1. 重力加速度は弱い、つまり慣性系に近い。数学的には

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$$

とにおいて $h_{\alpha\beta}, \partial_\gamma h_{\alpha\beta}$ の 2 次以上の項は無視する。

2. 重力場は静的、すなわち

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^0} = 0$$

3. 重力源は光速に比べて十分遅いとして

$$T^{00} \simeq \rho c^2$$

他の成分は 0。

である。

(どうい場合がこの近似が妥当か)

さて地球上でこの近似が妥当かを見よう。アインシュタインの重力理論は当然のことながら地球上での物体の運動を説明できなければならないからである。重力場が弱く静的で粒子の速度が遅いとき

$$g_{00} = -\frac{2\phi}{c^2} - 1 \tag{5.12}$$

の関係があった。地球表面上でこの関係が成り立つかどうかはわからないが、とりあえず地球上での ϕ の値 $\phi = -MG/r$ を代入してみよう。すると

$$g_{00} = \frac{2MG}{c^2} \frac{1}{r} - 1$$

である。データとして以下のものを使おう。これは物理学辞典 [5] からとったものである。

地球の質量 $M = 5.974 \times 10^{24} \text{kg}$

重力定数 $G = 6.67259 \times 10^{-11} \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2$

光速 $c = 2.9979 \times 10^8 \text{m/s}$

地球 (赤道) 半径 $r = 6.378 \times 10^6 \text{m}$

このデータから $2MG/c^2 = 8.9 \times 10^{-3} \text{m}$ となる。 r を地球の半径とすると $2MG/(c^2 r)$ は 10^{-9} 程度になり 1 よりずっと小さい。また $\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{2\phi}{c^2} \right)$ は $\frac{1}{r^2} \frac{2MG}{c^2}$ なのでこれは更に小さい。今地球上で式 (5.12) が妥当かはわからないのだが、妥当だとして ϕ の値を入れてみれば、妥当であるための条件 $g_{00} \simeq -1$ は満たしているとは言えたわけである。太陽が重力源の場合は $2MG/c^2$ は 3km 程度であり、太陽の半径よりもずっと小さい。だから惑星の運動の場合でも、今の意味で $g_{00} \simeq -1$ を満たしている。

第 6 章

ローレンツ力・マクスウェル方程式の一般座標への座標変換

一般座標での電磁気学は単に局所ローレンツ系での電磁気学の法則を座標変換するだけである。つまりローレンツ力の式とマクスウェル方程式を座標変換するのである。これはニュートン力学で運動方程式を直交座標から極座標へ変換することと同じことである。単に数学的変換であり新たな物理法則は何一つ含まない。極座標に成ったからといってニュートン力学が変わるわけがないのと同様である。この座標変換を見通し良くするためにわざわざテンソル形式で書き下したのである。

6.1 ローレンツ力・マクスウェル方程式

等価原理によると局所ローレンツ系では特殊相対論の項で述べた電磁気学の法則が成り立つ。それをテンソル形式で書くと

$$\frac{d^2 X^\alpha}{d\tau^2} = \frac{e}{mc} f^\alpha{}_\beta \frac{dX^\beta}{d\tau} \quad (6.1)$$

$$\partial_\beta f^{\alpha\beta} = 4\pi k_1 J^\alpha \quad (6.2)$$

$$\partial_\alpha f_{\beta\gamma} + \partial_\beta f_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma f_{\alpha\beta} = 0 \quad (6.3)$$

ということである。ここで 4 元電流密度は式 (1.27) で示したように

$$J^\alpha = \sum_j \bar{\rho}_j \frac{dX_j^\alpha}{d(c\tau)}$$

である。 $f^{\alpha\beta}$ は反対称テンソルという条件が必要である。又 $f_{\alpha\beta}, f^\alpha{}_\beta$ は $f^{\alpha\beta}$ の添字を上げ下げしたものである。すなわち

$$f_{\alpha\beta} \stackrel{\text{def.}}{=} \eta_{\alpha\gamma} \eta_{\beta\sigma} f^{\gamma\sigma} \quad f^\alpha{}_\beta \stackrel{\text{def.}}{=} \eta_{\beta\gamma} f^{\alpha\gamma}$$

である。さてこれを局所ローレンツ系でない一般の x 座標系に座標変換する。それはニュートン力学で単位直交座標を極座標に変換するのと全く同じである。すると

$$\frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} + \Gamma_{\sigma\mu}^\nu(x) \frac{dx^\sigma}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{e}{mc} f_\mu^\nu(x) \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (6.4)$$

$$\nabla_\nu f^{\mu\nu}(x) = 4\pi k_1 J^\mu(x) \quad (6.5)$$

$$\partial_\mu f_{\nu\gamma}(x) + \partial_\nu f_{\gamma\mu}(x) + \partial_\gamma f_{\mu\nu}(x) = 0 \quad (6.6)$$

が成り立つ。ここで、 $J^\mu(x)$ は

$$J^\mu(x) = \sum_j \bar{\rho}_j \frac{dx_j^\mu}{d(c\tau)}$$

である。又、

$$f_\mu^\nu(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\partial x^\nu}{\partial X^\alpha} f_{\beta}^{\alpha}(X) \frac{\partial X^\beta}{\partial x^\mu} \quad (6.7)$$

である。又、

$$f^{\mu\nu}(x) \stackrel{\text{def.}}{=} g^{\nu\sigma}(x) f_{\sigma}^{\mu}(x) \quad f_{\mu\nu}(x) \stackrel{\text{def.}}{=} g_{\mu\sigma}(x) f_{\nu}^{\sigma}(x)$$

である。 $f^{\mu\nu}(x), f_{\mu\nu}(x)$ は

$$f^{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x^\mu}{\partial X^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial X^\beta} f^{\alpha\beta}(X) \quad f_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial X^\beta}{\partial x^\nu} f_{\alpha\beta}(X)$$

のようにテンソルとして変換する。節 5.1 の終わりに述べたように、一般座標系での $J^0(x)$ はもはや電荷密度としての意味がないことに注意しよう。

局所ローレンツ系の方程式 (6.1)、(6.2)、(6.3) から一般座標の方程式 (6.4)、(6.5)、(6.6) へと導く証明を書くが飛ばしてもらっても全く構わない。これはテンソルの基本的性質であり、もしこの論文にテンソルの項があればそこで説明するのだが、そういう項がないので、証明を書くのである。単純作業なので自分でも簡単にできるであろう。

【証明】式 (6.1) の両辺に $\frac{\partial x^\nu}{\partial X^\alpha}$ を掛けて α で縮約すると目的の式が出る。詳しく書くと左辺は

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^\nu}{\partial X^\alpha} \frac{d^2 X^\alpha}{d\tau^2} &= \frac{\partial x^\nu}{\partial X^\alpha} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) \\ &= \frac{\partial x^\nu}{\partial X^\alpha} \frac{dx^\sigma}{d\tau} \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\sigma \partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} + \frac{\partial x^\nu}{\partial X^\alpha} \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} \\ &= \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} + \Gamma_{\sigma\mu}^\nu(x) \frac{dx^\sigma}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} \end{aligned}$$

右辺は、 $e/(mc)$ を略すが、

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^\nu}{\partial X^\alpha} f_{\beta}^{\alpha}(X) \frac{dX^\beta}{d\tau} &= \frac{\partial x^\nu}{\partial X^\alpha} f_{\beta}^{\alpha}(X) \frac{\partial X^\beta}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \\ &= f_{\mu}^{\nu}(x) \frac{dx^\mu}{d\tau} \end{aligned}$$

というわけである。

式 (6.2) の両辺に $\frac{\partial x^\mu}{\partial X^\alpha}$ を掛けて α で縮約すると目的の式が出る。詳しく書くと左辺は

$$\begin{aligned}\frac{\partial x^\mu}{\partial X^\alpha} \partial_\beta f^{\alpha\beta}(X) &= \frac{\partial x^\mu}{\partial X^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial X^\beta} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\sigma} \frac{\partial X^\beta}{\partial x^\lambda} f^{\sigma\lambda}(x) \right) \\ &= \frac{\partial x^\mu}{\partial X^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial X^\beta} \left(\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\nu} \frac{\partial X^\beta}{\partial x^\sigma} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} f^{\sigma\lambda}(x) + \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\sigma} \frac{\partial X^\beta}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} f^{\sigma\lambda}(x) + \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\sigma} \frac{\partial X^\beta}{\partial x^\lambda} \frac{\partial f^{\sigma\lambda}(x)}{\partial x^\nu} \right) \\ &= \Gamma_{\nu\sigma}^\mu(x) f^{\sigma\nu}(x) + \Gamma_{\nu\lambda}^\nu(x) f^{\mu\lambda}(x) + \frac{\partial f^{\mu\nu}(x)}{\partial x^{\nu\mu}} \\ &= \nabla_\nu f^{\mu\nu}(x)\end{aligned}$$

右辺は

$$\begin{aligned}\frac{\partial x^\mu}{\partial X^\alpha} J^\alpha(X) &= \frac{\partial x^\mu}{\partial X^\alpha} \sum_j \bar{\rho}_j \frac{dX_j^\alpha}{d(c\tau)} \\ &= \sum_j \bar{\rho}_j \frac{dx_j^\mu}{d(c\tau)} \\ &= J^\mu(x)\end{aligned}$$

というわけである。

式 (6.3) に $\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial X^\beta}{\partial x^\nu} \frac{\partial X^\gamma}{\partial x^\sigma}$ を掛けて α, β, γ で縮約する。第1項は

$$\begin{aligned}\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial X^\beta}{\partial x^\nu} \frac{\partial X^\gamma}{\partial x^\sigma} \partial_\alpha f_{\beta\gamma}(X) &= \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial X^\beta}{\partial x^\nu} \frac{\partial X^\gamma}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\lambda}{\partial X^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left(\frac{\partial x^\kappa}{\partial X^\beta} \frac{\partial x^\rho}{\partial X^\gamma} f_{\kappa\rho}(x) \right) \\ &= \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial X^\beta}{\partial x^\nu} \frac{\partial X^\gamma}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\lambda}{\partial X^\alpha} \left[\frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left(\frac{\partial x^\kappa}{\partial X^\beta} \right) \frac{\partial x^\rho}{\partial X^\gamma} f_{\kappa\rho}(x) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial x^\kappa}{\partial X^\beta} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left(\frac{\partial x^\rho}{\partial X^\gamma} \right) f_{\kappa\rho}(x) + \frac{\partial x^\kappa}{\partial X^\beta} \frac{\partial x^\rho}{\partial X^\gamma} \frac{\partial f_{\kappa\rho}(x)}{\partial x^\lambda} \right] \\ &= -\Gamma_{\mu\nu}^\kappa(x) f_{\kappa\sigma}(x) - \Gamma_{\mu\sigma}^\rho(x) f_{\nu\rho}(x) + \frac{\partial f_{\nu\sigma}(x)}{\partial x^{\mu\nu}} \\ &= \nabla_\mu f_{\nu\sigma}(x)\end{aligned}$$

第2項第3項は α, β, γ を巡回させたものなので、それに対応する μ, ν, γ が巡回したものになる。だから式 (6.3) は

$$\nabla_\mu f_{\nu\sigma}(x) + \nabla_\nu f_{\sigma\mu}(x) + \nabla_\sigma f_{\mu\nu}(x) = 0$$

となる。 $f_{\nu\sigma}$ は反対称なので、普通の微分である

$$\partial_\mu f_{\nu\sigma}(x) + \partial_\nu f_{\sigma\mu}(x) + \partial_\sigma f_{\mu\nu}(x) = 0$$

と等しい。【証明終】

ところで、局所ローレンツ系でのマクスウェル方程式 (6.2)、(6.3) では電磁場 $f^{\alpha\beta}$ の微分を普通の微分にしている。それについて私は大きな疑問を持っている。というのは電磁場の定義式であるローレンツ力の式 (6.1) を見れば分かる通り、電磁場というのは単位4元速度あたりの4元加速度のことである。4元速度はベクトルの差ではないが4元加速度は異なる点でのベクトルの差をとっている。電磁場の微分ということはこの異なる点での差の差ということだから2階微分ということである。だから異なる点で電磁場差を取るならばそれはただの微分ではなく、接続係数の $\Gamma_{\gamma\beta}^\alpha$ が含まなければならないのではないかと疑問に思っている。

さて、一般座標の電磁気学の方程式は式 (6.4)、(6.5)、(6.6) である。局所ローレンツ系では $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ が 0 なので、この式は局所ローレンツ系での電磁気学の法則も表していることになる。だから電磁気学の法則は局所ローレンツ系でも一般座標でも形式的には同じなのである。しかし、何度も述べているが、慣性系と非慣性系では同じ物理現象は起こらない。局所ローレンツ系では光は直進するが非慣性系では曲がる。数学の式が同じ文字式で掛けたからと言って、物理法則が同じというのは言いすぎであろうし、誤解を生むと思う。

電磁気学の方程式は式 (6.4)、(6.5)、(6.6) をみればわかるように $g_{\alpha\beta}$ を含んでいる。では $g_{\alpha\beta}$ はどうやって決まるかというそれは重力場の方程式によって決まる。その重力場の方程式はエネルギーテンソルとして電磁場や質点が含まれている。だから実際は両方の連立方程式なのである。これは別に驚くことでもなく、電磁気学の範囲に限っても、電荷の位置と運動が与えられれば電磁場は決まるが、実際は電荷の位置や運動は電磁場によって決まるのである。すなわちローレンツ力の式とマクスウェル方程式の連立方程式なのである。

6.2 ベクトルポテンシャル

ベクトルポテンシャルと電磁場テンソルの関係を一般座標で書こう。ここは完全に数学なので物理法則とは関係がない。一般座標 x 系での 4 元ポテンシャルを

$$A_\mu(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu} A_\alpha(X) \quad (6.8)$$

で定義する。ローレンツ系でのベクトルポテンシャルと電磁場の関係は

$$f_{\alpha\beta}(X) = \partial_\alpha A_\beta(X) - \partial_\beta A_\alpha(X)$$

はであった。両辺に $\frac{\partial x^\mu}{\partial X^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial X^\beta}$ をかけて α と β で縮約すると

$$f_{\mu\nu}(x) = \nabla_\mu A_\nu(x) - \nabla_\nu A_\mu(x)$$

となる。右辺は $\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ に等しいので結局一般座標での電磁場とベクトルポテンシャルの関係は

$$f_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) \quad (6.9)$$

となる。ローレンツ系でのローレンツ条件

$$\partial_\alpha A^\alpha(X) = 0$$

は一般座標で書くと

$$\nabla_\nu A^\nu(x) = 0 \quad (6.10)$$

となる。又 A^α を決定する方程式だが、ローレンツ系では

$$\left(\frac{1}{c^2} - \Delta\right) A^\alpha = 4\pi k_1 J^\alpha \quad (6.11)$$

だが、局所ローレンツ系ではこの式は成り立たない。それは 2 階微分を含んでいるからである。それでこの式を導出した過程の元に戻って考えてみよう。

$$\nabla_\beta f^{\alpha\beta} = 4\pi k_1 J^\alpha \quad (6.12)$$

この左辺に (6.9) の添字を上げた

$$f^{\alpha\beta} = g^{\alpha\gamma} g^{\beta\lambda} (\partial_\gamma A_\lambda - \partial_\lambda A_\gamma) \quad (6.13)$$

を代入する。

$$\begin{aligned}\nabla_\beta[g^{\alpha\gamma}g^{\beta\lambda}(\partial_\gamma A_\lambda - \partial_\lambda A_\gamma)] &= \nabla_\beta[g^{\alpha\gamma}g^{\beta\lambda}(\nabla_\gamma A_\lambda - \nabla_\lambda A_\gamma)] \\ &= g^{\alpha\gamma}\nabla_\beta\nabla_\gamma A^\beta - g^{\beta\lambda}\nabla_\beta\nabla_\lambda A^\alpha\end{aligned}\quad (6.14)$$

ここで、 $\partial_\gamma A_\lambda - \partial_\lambda A_\gamma = \nabla_\beta\nabla_\gamma A^\beta$ であることと、共変微分が $g_{\alpha\beta}$ と入れ替えられることを使った。ところで

$$\begin{aligned}\nabla_\beta\nabla_\gamma A^\beta - \nabla_\gamma\nabla_\beta A^\beta &= R^\beta_{\rho\beta\gamma}A^\rho \\ &= R_{\rho\gamma}A^\rho\end{aligned}$$

である。ローレンツ条件により左辺の第2項は0である。だから

$$\nabla_\beta\nabla_\gamma A^\beta = R_{\rho\gamma}A^\rho$$

である。これを (6.14) に代入することによって

$$g^{\alpha\gamma}R_{\rho\gamma}A^\rho - g^{\beta\lambda}\nabla_\beta\nabla_\lambda A^\alpha = 4\pi k_1 J^\alpha\quad (6.15)$$

となる。局所ローレンツ系では $g^{t\gamma} = \eta^{t\gamma}$ なので

$$-g^{\beta\lambda}\nabla_\beta\nabla_\lambda A^\alpha = \left(\frac{1}{c^2} - \Delta\right)A^\alpha$$

となる。だから局所ローレンツ系では

$$g^{\alpha\gamma}R_{\rho\gamma}A^\rho + \left(\frac{1}{c^2} - \Delta\right)A^\alpha = 4\pi k_1 J^\alpha$$

となる。局所ローレンツ系では $R_{\rho\gamma}$ は0とならないのであり (6.11) は成り立たない。まとめると一般座標では

$f_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$	電場と4元ポテンシャルの関係
$\nabla_\nu A^\nu = 0$	ローレンツ条件
$g^{\alpha\gamma}R_{\rho\gamma}A^\rho - g^{\lambda\gamma}\nabla_\lambda\nabla_\gamma A^\alpha = 4\pi k_1 J^\alpha$	4元ポテンシャルを決定する方程式

となる。

6.3 エネルギー運動量テンソル

局所ローレンツ系でのエネルギー運動量テンソルはローレンツ系でのそれと同じで

$$T^{\lambda\gamma} \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{4\pi k_1} \left(\eta_{\alpha\beta} f^{\alpha\lambda} f^{\beta\gamma} - \frac{\eta^{\lambda\gamma}}{4} f_{\alpha\beta} f^{\alpha\beta} \right)$$

である。この右辺に $\frac{\partial x^\mu}{\partial X^\lambda} \frac{\partial x^\nu}{\partial X^\gamma}$ を掛けて λ, γ で縮約すると、一般座標 x 系でのエネルギー運動量テンソルは

$$T^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{4\pi k_1} \left(g_{\alpha\beta}(x) f^{\alpha\mu}(x) f^{\beta\nu}(x) - \frac{g^{\mu\nu}(x)}{4} f_{\alpha\beta}(x) f^{\alpha\beta}(x) \right)\quad (6.16)$$

となる。エネルギー運動量の保存の式はローレンツ系では

$$\partial_\beta T^{\alpha\beta} = -f^\alpha_\beta J^\beta$$

であった。これに $\frac{\partial x^\mu}{\partial X^\alpha}$ をかけて α で縮約すると

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu}(x) = -f^\mu{}_\nu(x) J^\nu(x)$$

となる。

第7章

観測との比較

この章では一般相対論と観測事実を比べてみる。シュバルツシルトの解に使われる計量、座標を用いて計算する。シュバルツシルト座標の物理的意味は不明なのだが、我々が通常使っている極座標の意味で使って計算すると、観測事実を説明できてしまうのである。次章でシュバルツシルト座標の批判を書くが、シュバルツシルトの解にも何らかの真実が含まれているのであろう。シュバルツシルトの解の導出はしないが、これは実際重力場の方程式に入れてみて、確かめればよいであろう。私個人の経験で言えば、これを確かめるのは計算が大変だった記憶がある。

7.1 水星の近日点移動

まず水星の近日点移動について考える。もし重力加速度が逆2乗の法則なら惑星は楕円軌道を描く。しかし実際は水星の近日点は移動する。移動するというのももちろん恒星系に対してである。他の惑星の影響などを考慮に入れれば、その移動はニュートン力学の範囲内でだいたい説明がつくようである。しかし100年で43秒の移動分だけはどうしても説明がつかなかったようだ。それが相対論で説明がつくのである。その計算法を述べよう。以下の計算法は内山 [2] を参考にした。

計量テンソルはシュバルツシルトの解を使おう。すなわち

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) (c\Delta t)^2 + \frac{1}{1 - \alpha/r} (\Delta r)^2 + r^2 (\Delta\theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta (\Delta\phi)^2 \quad (7.1)$$

ここで $\alpha = 2GM/c^2$ であり、 M は太陽の質量である。惑星の運動方程式は

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{dx} = 0 \quad (7.2)$$

である。簡単のため $\theta = \pi/2$ となる座標系をとる。シュバルツシルトの解の接続係数は、 $x^0 = ct, x^1 =$

$r, x^2 = \theta, x^3 = \phi$ として

$$\begin{aligned}\Gamma_{01}^0 &= \frac{\alpha}{2r^2(1-\alpha/r)} \\ \Gamma_{00}^1 &= \frac{\alpha}{2r^2} \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) & \Gamma_{11}^1 &= -\frac{\alpha}{2r^2(1-\alpha/r)} \\ \Gamma_{22}^1 &= -r \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) & \Gamma_{33}^1 &= -r \sin^2 \theta \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{r} & \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta \\ \Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{r} & \Gamma_{23}^3 &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta}\end{aligned}$$

である。この接続係数を使うと運動方程式 (7.2) は、 $\theta = \pi/2, \dot{\theta} = 0$ に注意して

$$\text{時間成分} \quad (\ddot{ct}) + \frac{\alpha}{r^2} \frac{1}{1-\alpha/r} (\dot{ct}) \dot{r} = 0 \quad (7.3)$$

$$r \text{ 成分} \quad \ddot{r} + \frac{1}{2} \frac{\alpha}{r^2} \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) (\dot{ct})^2 - \frac{1}{2} \frac{\alpha}{r^2} \frac{1}{1-\alpha/r} (\dot{r})^2 - r \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) \dot{\phi}^2 = 0 \quad (7.4)$$

$$\phi \text{ 成分} \quad \ddot{\phi} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\phi} = 0 \quad (7.5)$$

となる。ここで上付きドットは $d/d\tau$ のこととする。時間成分は

$$\frac{1}{1-\alpha/r} \frac{d}{d\tau} \left[\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) (\dot{ct}) \right] = 0$$

と変形できる。 $(1-\alpha/r) (\dot{ct})$ は固有時間が経っても変化しない定数である。だから

$$\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) (\dot{ct}) = B \quad (7.6)$$

とおこう。 ϕ 成分は

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{d\tau} (r^2 \dot{\phi}) = 0$$

と変形できる。 $r^2 \dot{\phi}$ は固有時間が経っても変化しない定数である。だから

$$r^2 \dot{\phi} = h \quad (7.7)$$

とおこう。 r 成分は上記の運動方程式 (7.4) は複雑なので、距離の式 (7.1) で $\theta = \pi/2, \Delta\theta = 0$ とした

$$c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) (c\Delta t)^2 - \frac{1}{1-\alpha/r} (\Delta r)^2 - r^2 (\Delta\phi)^2 \quad (7.8)$$

を使う。これを $(d\tau)^2$ で割って (7.6) と (7.7) を使って (\dot{ct}) と $\dot{\phi}$ を消すと

$$\frac{1}{1-\alpha/r} \dot{r}^2 - \frac{B^2}{1-\alpha/r} + \frac{h^2}{r^2} + c^2 = 0 \quad (7.9)$$

となる。 r と ϕ の関係を知りたいので、ニュートン力学で惑星の運動を解析するときによくやるように $d/d\tau$ を $\frac{d\phi}{d\tau} \frac{d}{d\phi}$ へ、 $r = 1/u$ と置き換える。 \dot{r} は

$$\dot{r} = \frac{d\phi}{d\tau} \frac{d}{d\phi} \left(\frac{1}{u}\right) = u^2 h \left(-\frac{1}{u^2} u'\right) = -hu'$$

となる。ここで u' は $\frac{du}{d\phi}$ の意味とする。(7.9) に $\dot{r} = -hu'$ を入れて整理すると

$$(u')^2 + u^2 - \frac{\alpha c^2}{h^2} u + \frac{c^2 - B^2}{h^2} = \alpha u^3 \quad (7.10)$$

となる。ニュートン力学の場合は

$$(u')^2 + u^2 - \frac{\alpha c^2}{h^2} u - \frac{2\epsilon}{h^2} = 0$$

である。ここで h は式 (7.7) での固有時間の微分が普通の微分になったものである。 ϵ は単位質量あたりの惑星のエネルギーである。後で $2\epsilon \simeq B^2 - c^2$ であることを示す。式 (7.10) の右辺の αu^3 がなければニュートン力学の場合と形式的には一致する。 αu^3 がなければこの方程式の解は

$$u = \frac{1}{l}(1 + e \cos \phi) \quad (7.11)$$

となる (図 7.1)。すなわち

$$r = \frac{l}{1 + e \cos \phi}$$

である。(7.11) が解であることは代入してみればすぐわかる。(尚、 $l = \frac{2h^2}{\alpha c^2}$ であり、 $e = \sqrt{\frac{4(B^2 - c^2)h^2}{c^4 \alpha^2} + 1}$ である。これをわざわざ確かめる必要はない。) しかし αu^3 無視してしまつては近日点の移動は説明できない。この項こそが近日点移動の原因なのである。

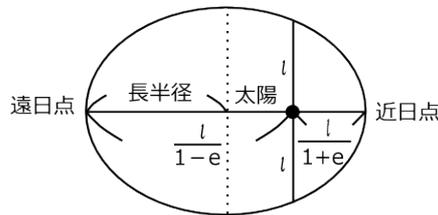


図 7.1

(近似解)

水星の近日点の移動を説明するためには、式 (7.10) を解いて u を ϕ の関数として求めれば良いわけである。解く方法としてはコンピューターを使って数値計算するのが一番正確であろう。ここでは近似解を、代数的に求める。ただ近似解というのはどうしても、かんに頼ったようなすっきりしないものになってしまうがご容赦願いたい。

方法として、まず

$$u = \frac{1}{l}(1 + e \cos(\eta\phi)) \quad (7.12)$$

とおいて η を求めよう。これを (7.10) に入れて、 $\cos(\eta\phi)$ のべき乗の係数がそれぞれ等しくなるようにし

よう。

$$(0 \text{ 次}) \quad \frac{e^2 \eta^2}{l^2} + \frac{1}{l^2} - \frac{\alpha c^2}{h^2 l} + \frac{c^2 - B^2}{h^2} = \frac{\alpha}{l^3} \quad (7.13)$$

$$(1 \text{ 次}) \quad \frac{2e}{l^2} - \frac{\alpha c^2 e}{h^2 l} = \frac{3\alpha e}{l^3} \quad (7.14)$$

$$(2 \text{ 次}) \quad -\frac{e^2 \eta^2}{l^2} + \frac{e^2}{l^2} = \frac{3\alpha e^2}{l^3} \quad (7.15)$$

$$(3 \text{ 次}) \quad 0 = \frac{\alpha e^3}{l^3} \quad (7.16)$$

1次で l を求め、それを使って2次で η を求め、0次で e を求める。3次は成り立たない。ただ、 e は0.2程度なので αu^3 の中で1番小さい項である。とりあえず2次の式から

$$\eta = \sqrt{1 - \frac{3\alpha}{l}} \quad (7.17)$$

と求める l はニュートン力学の値を使ってもそう変わらないと思われるので、この式で η は求まってしまう。これで近日点移動の計算はできるので l, e を求める必要はない。尚、 h, b は初期条件から決まる値である。

(数値代入)

まず観測値のデータを物理学辞典 [5] から列挙する。

(水星データ)

離心率 $e = 0.20563$

軌道長半径 $0.38710 \times 149.597870 \times 10^9 \text{m} = 5.7909 \times 10^{10} \text{m}$

公転周期 0.2409 年

(その他のデータ)

重力定数 $G = 6.67259 \times 10^{-11} \text{N} \cdot \text{m}^2 \text{kg}^{-2}$

太陽半径 $6.9599 \times 10^8 \text{m}$

太陽質量 $M = 1.9891 \times 10^{30} \text{kg}$

光の速度 $c = 2.9979 \times 10^8 \text{m/s}$

このデータの軌道長半径などの距離は通常の意味での剛体の長さのことである。一方、今方程式で用いたシュバルツシルト座標の r は物理的意味がわからない。ただ通常の意味での中心距離に近いと想像しているだけである。ここらの議論は8章で詳細に議論しているので見て欲しい。

そういうわけで r の意味はわからないのだが、観測値の距離と同一視しておこう。図 7.1 から

$$l = (1 - e^2) \times \text{軌道長半径}$$

だが、観測データをそのまま入れて $l = (1 - 0.20563^2) \times 5.7909 \times 10^{10} = 5.5460 \times 10^{10} \text{m}$ とする。又、

$$\alpha = \frac{2GM}{c^2} = 2.9536 \times 10^3 \text{m} \quad \frac{\alpha}{l} = 5.3256 \times 10^{-8}$$

さて、では近日点の移動量を求めよう。

$$r = \frac{l}{1 + e \cos(\eta\phi)}$$

なので、 $\eta\phi = \pi, 3\pi, 5\pi \dots$ のように $\eta\phi$ が 2π 進むごとに r は最小値をとる。だから ϕ が $2\pi/\eta$ 進むごとに近日点となる。だから1周、すなわち 2π あたりの近日点の 2π からのずれは $2\pi/\eta - 2\pi$ である (図 7.2)。上記観測データの公転周期は近日点間の公転周期なのか恒星系での公転周期でのなのか不明だが、そう違わないであろう。だからそのまま使くと 100 年間での水星の回転数は $100/0.2409$ である。だから 100 年間での水星の近日点の移動量は

$$2\pi \left(\frac{1}{\sqrt{1-3\alpha/l}} - 1 \right) \times \frac{100}{0.2409} \times \left(\frac{180}{\pi} \times 3600 \right) = 42.976 \text{ 秒}$$

となる。これは観測値の 43 秒とピッタリ一致する。正に驚きである。しかし、これはかんに頼った近似解で

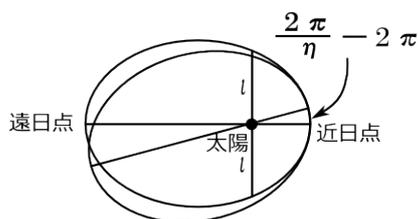


図 7.2

あることを忘れては行けない。すなわち式 (7.16) でわかるように $\cos(\eta\phi)$ の 3 次の項は成り立たないのである。だから厳密解とどれだけ違うかはわからないのである。さらに重要な事は、この方程式で使われているシュバルツシルト座標の r が観測値とどう関係があるかもわからないのである。

($B^2 - c^2$ について)

微分方程式 (7.10) に登場する $B^2 - c^2$ が、惑星の速度が遅いか、又はポテンシャルが小さい極限で、ニュートン力学での惑星の単位質量あたりのエネルギーの 2 倍に対応することを示そう。

シュバルツシルト計量

$$\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) (c\Delta t)^2 = c^2(\Delta\tau)^2 + \frac{\Delta r^2}{1 - \alpha/r} + r^2\Delta\phi^2$$

の両辺に $(1 - \alpha/r)/\Delta\tau^2$ を掛けると、左辺は B^2 の定義式になるので

$$B^2 = c^2 \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) + \dot{r}^2 + \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) r^2 \dot{\phi}^2$$

となる。だから

$$B^2 - c^2 = -\frac{c^2\alpha}{r} + \dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 - \frac{\alpha}{r} r^2 \dot{\phi}^2$$

$\alpha = 2GM/c^2$ を入れると

$$B^2 - c^2 = 2 \left(-\frac{GM}{r} + \frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) \right) - \frac{2GM}{c^2 r} r^2 \dot{\phi}^2$$

となる。 $\frac{2GM}{c^2 r} r^2 \dot{\phi}^2$ を無視できれば $B^2 - c^2$ はニュートン力学での惑星の単位質量あたりのエネルギーの 2 倍となる。ただし微分は固有時間での微分であるのでそこは違う。 $\frac{2GM}{c^2 r} r^2 \dot{\phi}^2$ を無視できるのは惑星の速度が c より十分遅いか、ポテンシャルの絶対値 GM/r が c^2 より十分小さい場合である。

7.2 光の湾曲

等価原理によると、光は重力によって湾曲する。重力を消し去った系で特殊相対論的な電磁気学が成り立つ。そこでは光は直進する。自由落下系は重力を消し去った系である。だから重力源に固定された系から見れば、光は重力源に引かれることになるというわけである。さて、自由落下する箱のなかでは光は直進する。つまり運動がわかっているのである。だから重力源に固定された座標系での光の運動は、自由落下する箱の運動がわかればわかるのである。こういう微視的視点にたって考えるのは本質が理解できてよいのだが、実は私はその方法で説明することができない。その方法で説明している本もない。それで不本意ながら、形式的な運動方程式から計算しよう。今から示す方法は、内山 [2] を参考にした。

惑星の運動のときと同様シュバルツシルト計量で $\theta = \pi/2, \Delta\theta = 0$ とした

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) (c\Delta t)^2 + \frac{1}{1 - \alpha/r} (\Delta r)^2 + r^2 (\Delta\phi)^2 \quad (7.18)$$

を使う。惑星の運動のときは運動方程式のパラメータとして固有時の $d\tau$ を使った。光の場合は $d\tau = 0$ なのでは使えない。それで元の意味に立ち返って考えよう。運動方程式

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} = 0 \quad (7.19)$$

は式 (4.10) を $(\Delta\tau)^2$ で割ったものであった。だから元の式 (4.10) に戻れば良い。最初の変位ベクトルが $(c\Delta t_1, \Delta r_1, 0, \Delta\phi_1)$ だったとする。これは光の場合なら

$$- \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) (c\Delta t_1)^2 + \frac{1}{1 - \alpha/r} (\Delta r_1)^2 + r^2 (\Delta\phi_1)^2 = 0$$

という初期条件を満たしている。そして次の変位 $(c\Delta t_2, \Delta r_2, 0, \Delta\phi_2)$ は最初の変位から

$$\Delta x_2^\alpha = \Delta x_1^\alpha - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \Delta x_1^\beta \Delta x_1^\gamma \quad (7.20)$$

の関係で決まるということである。尚、平行移動によってベクトルの大きさは変わらない。つまり最初 $dS^2 = 0$ なら式 (4.10) で決まる次の変位でも $dS^2 = 0$ である。最初 $dS^2 = -1$ なら次も $dS^2 = -1$ である。そして最初の変位 $\Delta x_1^\alpha \rightarrow 0$ の極限にもっていったのが光や質点の軌道というわけである。

この運動方程式のパラメーターだが、例えば最初の時間変位の Δt_1 でもよい。すなわち、式 (7.20) を $(\Delta t_1)^2$ で割り、 Δx_2 から Δx_3 を決める式もその後もすべて $(\Delta t_1)^2$ で割ればよいということである。ここで注意して欲しいのは座標変数それ自体をパラメーターに使ってはいけないということである。もし例えば t をパラメーターとしたら、それは

$$\frac{1}{\Delta t_1} \left(\frac{c\Delta t_2}{\Delta t_2} - \frac{c\Delta t_1}{\Delta t_1} \right) + \Gamma_{\beta\gamma}^0 \frac{\Delta x_1^\beta}{\Delta t_1} \frac{\Delta x_1^\gamma}{\Delta t_1} \neq 0 \quad (7.21)$$

という意味であり、 $c\Delta t_2$ を Δt_2 で割るということであり、左辺は 0 にはならないのである。座標変数それ自体をパラメーターにするということは平行移動の式 (7.20) を同じ数では割らないということであり、それでは運動方程式が成り立たないのである。それは微分方程式の形で書くと

$$\frac{d^2 x^\alpha}{(dx^\alpha)^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{dx^\alpha} \frac{dx^\gamma}{dx^\alpha} \neq 0$$

という式になり第1項は必ず0になるが、第2項は必ず0になるというわけではないので運動方程式は成り立たなくなってしまうのである。しかし実際はパラメーターなどというものをわざわざ導入しなくても運動の解析はできる。ただパラメーターの方が慣れているのでその方法をとっただけである。パラメーターを使わない方法もすぐその後で説明する。

まずパラメーターを使った方法だが、これは惑星の場合と同じである。違いは惑星軌道の場合の式(7.8)

$$c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) (c\Delta t)^2 - \frac{1}{1 - \alpha/r} (\Delta r)^2 - r^2 (\Delta\phi)^2$$

において、今回は左辺が0となるということだけである。だから式(7.9)での $c = 0$ と置いた式になり、そして式(7.10)で $c = 0$ と置いた式になる。すなわち光の軌道の方程式は

$$(u')^2 + u^2 - \frac{B^2}{h^2} = \alpha u^3 \quad (7.22)$$

となる。記号は惑星の軌道の方程式の場合と全く同じである。

これをパラメーターを使わずに導いてみよう。第0成分の運動方程式は、式(7.3)で $(\Delta\tau)^2$ を払った

$$\Delta[\Delta(ct)] + \frac{\alpha}{r^2} \frac{1}{1 - \alpha/r} \Delta(ct)\Delta r = 0$$

だが、これは

$$\frac{1}{1 - \alpha/r} \Delta \left[\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) \Delta(ct) \right] = 0$$

と変形できる。 $(1 - \alpha/r)\Delta(ct)$ は定数となる。それで

$$\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) \Delta(ct) = \Delta B \quad (7.23)$$

とおこう。 ϕ 成分の運動方程式は、式(7.5)で $(\Delta\tau)^2$ を払った

$$\Delta(\Delta\phi) + \frac{2}{r} \Delta r \Delta\phi = 0$$

だが、これは

$$\frac{1}{r^2} \Delta(r^2 \Delta\phi) = 0$$

と変形できる。 $r^2 \Delta\phi$ は定数となる。それで

$$r^2 \Delta\phi = \Delta h \quad (7.24)$$

とおこう。不変距離が0の式

$$\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) \Delta(ct)^2 - \frac{1}{1 - \alpha/r} (\Delta r)^2 - r^2 (\Delta\phi)^2 = 0 \quad (7.25)$$

で、(7.23)を用いて $\Delta(ct)$ を消去し、 $r = 1/u$ と変数変換し、 $\Delta r = -\Delta u/u^2$ とし、 $(\Delta\phi)^2$ で割ると

$$\frac{\Delta B^2}{(1 - u\alpha)(\Delta\phi)^2} - \frac{1}{1 - u\alpha} \frac{1}{u^4} \left(\frac{\Delta u}{\Delta\phi}\right)^2 - \frac{1}{u^2} = 0$$

となる。式(7.24)を用いて $\Delta\phi$ を消去すると、

$$\frac{\Delta B^2}{(1 - u\alpha)u^4(\Delta h)^2} - \frac{1}{1 - u\alpha} \frac{1}{u^4} \left(\frac{\Delta u}{\Delta\phi}\right)^2 - \frac{1}{u^2} = 0$$

整理すると

$$\left(\frac{\Delta u}{\Delta \phi}\right)^2 + u^2 - \frac{(\Delta B)^2}{(\Delta h)^2} = \alpha u^3 \quad (7.26)$$

となる。式 (7.22) の B/h は式 (7.6)、式 (7.7) から

$$\frac{B}{h} = \frac{(1 - \alpha/r) \frac{cdt}{d\lambda}}{r^2 \frac{d\phi}{d\lambda}}$$

である。ここで λ はなんらかのパラメーターである。これは $\Delta B/\Delta h$ に等しい。だから式 (7.26) は (7.22) と同じなのである。

式 (7.22) に戻ろう。右辺の αu^3 は αu が 1 より十分小さいときは左辺の u^2 より小さくなり無視して構わないであろう。この場合は

$$u = \frac{\cos \phi}{l}$$

が解になることはこれを代入してみればすぐ確かめられる。ここで $l = h/B$ である。これは $r = l/\cos \phi$ ということであり、図 7.3 のように直線となる。ニュートン力学が主張することと一致するわけである。 $\alpha u \ll 1$ ということは重力ポテンシャルが小さいということなので、光の場合も重力ポテンシャルが小さいところではニュートン力学に一致するわけである。尚、太陽の近くを通る光線の場合、 αu が小さいことは u に $\cos \phi/l$ を入れてみればわかる。 l を太陽の半径程度と見れば後で見るように αu は 10^{-6} 程度である。

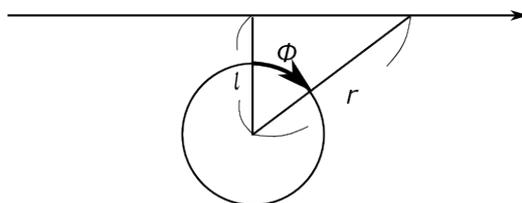


図 7.3

(近似解)

さて光の屈折角を求めるには式 (7.22) を解けばよいわけである。コンピューターを用いた数値計算で解けばいいのだがここでは、いわゆる代数的に近似的に説いていみよう。さて、解の形を

$$u = \frac{1}{l} [\cos \phi + \delta(\phi)] \quad (7.27)$$

としてみよう。ここで $l = h/B$ である。これを方程式 (7.22) に代入すると

$$\delta'(\phi) = \left(\frac{\cos \phi}{\sin \phi} - \frac{3\alpha \cos^2 \phi}{2l \sin \phi}\right) \delta(\phi) - \frac{\alpha \cos^3 \phi}{2l \sin \phi} - \delta'(\phi)^2 - \delta(\phi)^2 + \frac{\alpha}{l} (3 \cos \phi \delta(\phi)^2 + \delta(\phi)^3)$$

となる。ここで δ と δ' の 2 次以上の項を無視すると

$$\delta'(\phi) = \left(\frac{\cos \phi}{\sin \phi} - \frac{3\alpha \cos^2 \phi}{2l \sin \phi}\right) \delta(\phi) - \frac{\alpha \cos^3 \phi}{2l \sin \phi} \quad (7.28)$$

となる。2 次の項を無視することの妥当性は後で検討する。ところで微分方程式の一般論より

微分方程式

$$y'(x) = f(x)y(x) + g(x)$$

の解は

$$y(x) = z(x) \int^x g(t) \cdot z(t)^{-1} dt + z(x)$$

である。ここで

$$z(x) = C_1 \exp\left(\int^x f(s) ds\right)$$

である。 C_1 は定数である。

これを使う。今の場合

$$f = \frac{\cos \phi}{\sin \phi} - \frac{3\alpha \cos^2 \phi}{2l \sin \phi} \quad g = -\frac{\alpha \cos^3 \phi}{2l \sin \phi}$$

である。 f の第2項は後で示すように $\alpha/l \ll 1$ なので第1項に比べて無視して

$$f = \frac{\cos \phi}{\sin \phi} \quad g = -\frac{\alpha \cos^3 \phi}{2l \sin \phi}$$

として良いだろう。積分公式

$$\int \frac{\cos \phi}{\sin \phi} d\phi = \log(\sin \phi) \quad \int \frac{\cos^3 \phi}{\sin^2 \phi} d\phi = -\sin \phi - \frac{1}{\sin \phi}$$

を使う。 z を計算しよう。

$$\begin{aligned} z(\phi) &= C_1 \exp \int^{\phi} \frac{\cos t}{\sin t} dt \\ &= C_1 \exp(\log(\sin \phi)) \\ &= C_1 \sin \phi \end{aligned}$$

そして

$$\begin{aligned} \int^{\phi} g(t)z(t)^{-1} dt &= -\frac{\alpha}{2l} \int^{\phi} \frac{\cos^3 t}{\sin t} \frac{1}{C_1 \sin t} dt \\ &= \frac{\alpha}{2lC_1} \left(\sin \phi + \frac{1}{\sin \phi} \right) + C_2 \end{aligned}$$

C_2 は積分定数である。これらを使うと

$$\delta(\phi) = \frac{\alpha}{2l} (1 + \sin^2 \phi) + C \sin \phi$$

と求まる。ここで C は不定の定数である。 ϕ のプラスマイナスに関して対称な解は $C = 0$ のときである。だから

$$u = \frac{1}{l} \left(\cos \phi + \frac{\alpha}{2l} (1 + \sin^2 \phi) \right) \quad (7.29)$$

である。式 (7.27) を (7.22) に代入して式 (7.28) を導く際に、 $\delta(\phi)$ の2次以上の項を無視した。その妥当性なのだが、 δ は無次元の量であり α/l 程度の大きさであり、これは後で示すように1より十分小さい。だから2次以上の項を無視してもつじつまは合うのである。

さて今知りたいのは $r \rightarrow \infty$ での ϕ の値である。すなわち $u = 0$ のときの ϕ の値である。それは (7.29) で $u = 0$ とした

$$\cos \phi + \frac{\alpha}{2l}(1 + \sin^2 \phi) = 0 \quad (7.30)$$

を解けばよいわけである。これは $\cos \phi$ の 2 次方程式なので簡単に解けて

$$\phi = \cos^{-1} \left(\frac{l}{\alpha} \pm \sqrt{\left(\frac{l}{\alpha}\right)^2 + 2} \right) \quad (7.31)$$

と求まる。 $\cos \phi < 0$ の解が欲しいので \pm は $-$ である。つまり

$$\phi = \cos^{-1} \left(\frac{l}{\alpha} - \sqrt{\left(\frac{l}{\alpha}\right)^2 + 2} \right) \quad (7.32)$$

である。今知りたいのは図 7.4 にあるとおり、光の直線からのずれである屈折角である。それは

$$\text{屈折角} = 2 \left[\cos^{-1} \left(\frac{l}{\alpha} - \sqrt{\left(\frac{l}{\alpha}\right)^2 + 2} \right) - \frac{\pi}{2} \right] \quad (7.33)$$

である。

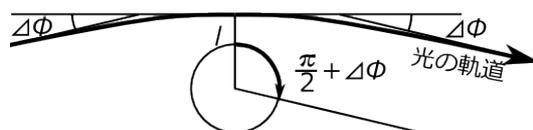


図 7.4

さて、光は図 7.4 のように $r = l$ で重力源に最も近づく軌道を描く。この l はシュバルツシルト座標での値であり観測値ではない。しかしよくわからないのでとりあえず太陽半径の観測値を入れてみよう。節 7.1 のデータより

$$l = 6.9599 \times 10^8 \text{ m}$$

$$\alpha = 2.9536 \times 10^3 \text{ m}$$

である。そして

$$\frac{\alpha}{l} = 4.23437 \times 10^{-6}$$

であり、何度も $\alpha/l \ll 1$ であると言ってきたが、ようやくここでそのことを示せたわけである。さてこの値を式 (7.33) に入れて秒になおすと

$$\text{屈折角} = 2 \left[\cos^{-1} \left(\frac{l}{\alpha} - \sqrt{\left(\frac{l}{\alpha}\right)^2 + 2} \right) - \frac{\pi}{2} \right] \times \frac{180}{\pi} \times 3600 = 1.7504 \text{ 秒} \quad (7.34)$$

を得る。この値は内山 [2] によると、観測値とはそれほど一致しないらしい。しかし佐藤 [3] によると今の状況とは異なるが、重力による電磁波の屈折は、一般相対論による計算値と実験値とは精度よく合うとのことである。

尚、(7.30) を解くのにあたって解の ϕ は $\pi/2$ に近いとして近似を使っても良い。すなわち $\phi = \pi/2 + \Delta\phi$ として (7.30) を $\Delta\phi$ の 1 次まで展開すると

$$-2l\Delta\phi + 2\alpha = 0$$

を得る。これを解いて

$$\Delta\phi = \frac{\alpha}{l} \quad \text{屈折角} = \frac{2\alpha}{l} \quad (7.35)$$

と求まる。(7.32) より見通しがいい。屈折角は古典重力ポテンシャルを c^2 で割った値の 4 倍なわけである。そしてこの式で計算しても

$$\frac{2\alpha}{l} \times \frac{180}{\pi} \times 3600 = 1.75007 \text{ 秒}$$

となり式 (7.34) とほとんど変わらない。

7.3 赤方偏移

一般相対論によると、重力によって電磁波の振動数が変わる。これはどういう現象からいうと、重力ポテンシャルの低い点で発した電磁波をポテンシャルの高い点で観測すると振動数が小さくなるという現象である (図 7.5)。それを説明しよう。

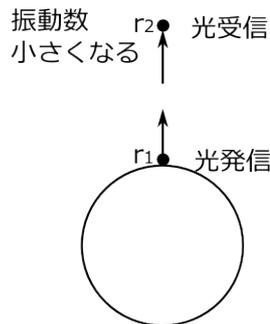


図 7.5

これは定性的には自由落下系で電磁気学が成り立つということから説明できるが、シュバルツシルト計量を使って定量的に説明する。今 $r = r_1$ で光を発し、 $r = r_2$ で受信するとする。 $r_1 < r_2$ とする (図 7.5)。 $t = 0$ で波の山を発し $t = \Delta\bar{t}$ で次の山を発したとしよう。さてシュバルツシルト座標の r を普通の意味の極座標半径と仮定しよう。この仮定は 8 章で検討する。シュバルツシルト計量での光の運動方程式は

$$\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) (c\Delta t)^2 = \frac{\Delta r^2}{1 - \alpha/r} \iff \Delta t = \frac{1}{c} \frac{\Delta r}{1 - \alpha/r} \quad (7.36)$$

である。光が r_1 から r_2 に達するのに要する時間これを積分した

$$\frac{1}{c} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{1 - \alpha/r} \quad (7.37)$$

である。 $t = 0$ で発した光の山も $t = \Delta\bar{t}$ に発した光の山も r_1 から r_2 へ達するのに同じ時間かかる。だから r_2 での山と山の間隔も $\Delta\bar{t}$ である。一方その固有時、すなわち r_1, r_2 にそれぞれ静止している慣性系から

みた山と山の間隔は $\Delta t_1, \Delta t_2$ はそれぞれ

$$\Delta t_1 = \sqrt{1 - \frac{\alpha}{r_1}} \Delta \bar{t} \quad \Delta t_2 = \sqrt{1 - \frac{\alpha}{r_2}} \Delta \bar{t}$$

である。 $r_1 < r_2$ なので、 r_2 での固有時の方が長い。すなわち振動数が小さくなるわけである。振動数比は

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \sqrt{\frac{1 - \alpha/r_1}{1 - \alpha/r_2}}$$

である。

内山 [2] によると太陽光線のスペクトルでの実験結果ではそれほど満足な結果は出ていないらしい。上記計算結果との一致の程度が低いということであろう。佐藤 [3] によると、赤方偏移はメスバウアー効果というものを用地上で証明されているらしい。ただどの程度の精度かという言及はない。

第Ⅲ部

考察

第 8 章

シュバルツシルト座標の意味について

この章では「慣性系でユークリッド幾何成り立つなら重力場中でもユークリッド幾何成り立つ」ことについて簡単に触れた後、シュバルツシルト座標の意味について考察する。物理的な思考実験をした後、シュバルツシルト座標を局所ローレンツ座標に座標変換して調べる。しかしどうしても矛盾点がでてきてしまうのである。

8.1 相対論とユークリッド幾何

重力場が存在するところではユークリッド幾何成り立たないと通説では言われているが、それは間違いであろう。そうではなく、慣性系でユークリッド幾何が成り立つなら重力場が存在するところでもユークリッド幾何が成り立つ、というのが私の考えである。その理由を簡単に説明しよう。今、ある木製の直角三角形があるとしよう。プラスチックの定規と分度器を使って、慣性系でこの三角形の辺の長さ、角度を測ったとしよう。底辺の長さが図 8.1 のように例えば 4cm だったとしよう。さてこの木製の三角形とプラスチックの定規と分度器を重力場がある、慣性系でないところにもっていったとしよう。そして同じようにこの木製の三角形の辺と角度を、このプラスチックの定規と分度器で測ったとしよう。このとき測定値はどうなるか。それは全く変わらないはずである。底辺は当然 4cm のままのはずである。通説の言うように木製の三角形が伸縮したとしてもそれは同じようにプラスチックの定規にも起きるはずである。だから三角形の底辺が 4cm であるということは変わらないはずである。同じように他の辺も角度も変わらないはずである。だからもし局所ローレンツ系でピタゴラスの定理が成り立つなら、重力場が存在する系でも成り立つ。そして

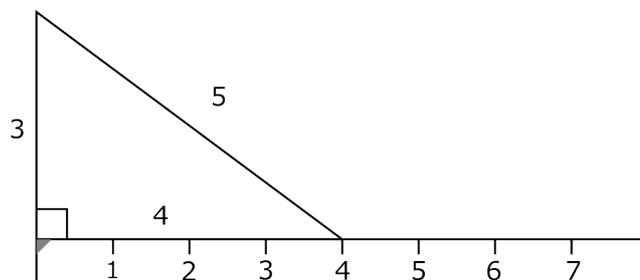


図 8.1

慣性系でユークリッド幾何成り立つなら重力場のある系でも成り立つ。

と結論できる。そもそも伸びるとか縮むとかは何かに対してである。だから比較するものを明確にしなければそのような主張は無意味である。通説でよく言われている「回転円板でユークリッド幾何が成り立たなくなる」というのはおかしい主張なのである。長さや角度を測るとは本来物体の重なり関係のことなのである。

8.2 シュバルツシルト計量での t, r, θ, ϕ の意味と批判

シュバルツシルトの解

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) (c\Delta t)^2 + \frac{1}{1 - \alpha/r} (\Delta r)^2 + r^2 (\Delta\theta)^2 + r^2 \sin^2\theta (\Delta\phi)^2 \quad (8.1)$$

に現れる t, r, θ, ϕ 座標は一体いかなる物理的な意味があるのだろうか。どの本を読んでもただ球対称と書いていだけである。本来なら r というのは定規の目盛とこういう関数関係にあるというふうでなければならぬ。例えば x が定規の目盛を表すなら、 $r = x^2$ というふうな関係にあるということである。とにかく物理的意味が書いていないのでここで推測しよう。

それでまず球対称な重力源に図 8.2 のように普通の極座標を導入しよう。要するに定規を重力源に沿って並

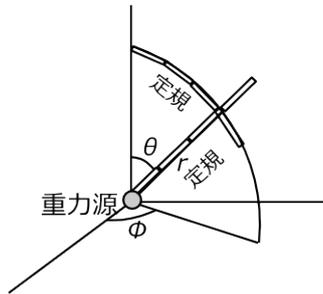


図 8.2

べるのである。その目盛を r_k, θ_k, ϕ_k と書こう。これはすでに重力源があるところへ定規を並べたと考えてもらってもいいし、定規を並べた後に重力源を持ってきたと考えてもらってもいい。このとき定規が重力場によって伸びるとか縮むとかいう主張は前節 8.1 で述べたように全く無意味である。重力源はこの極座標の原点に固定され回転しないとする。今 r_s, θ_s, ϕ_s をシュバルツシルトの解の座標の意味としよう。この座標と極座標との関係を知りたいわけである。この関係がわからなければ、シュバルツシルト座標など何の意味もなからう。

さてシュバルツシルト座標の角度と極座標の角度の関係だが

仮定 1 角度に関してはシュバルツシルト座標と極座標は等しい。すなわち $\theta_s = \theta_k, \phi_s = \phi_k$ である。

と仮定してみよう。これはこれ以外考えられないからである。さらに

仮定 2 シュバルツシルト半径 r_s は極座標半径 r_k のみに依存し r_k の単調増加関数である。

と仮定してみよう。根拠をうまく説明できないが、これもそれしか考えられないからである。

この2つの仮定によって、シュバルツシルト座標 r_s, θ_s, ϕ_s にある値が与えられれば、その点はシュバルツシルト時間 t_s に関係なく、極座標の点が決まるということになる。逆に極座標にある値が与えられれば、シュバルツシルト時間 t_s に関係なく、シュバルツシルト座標 r_s, θ_s, ϕ_s が決まるということになる。そして極座標の θ_k, ϕ_k を固定して半径方向に位置を動かせばシュバルツシルト半径 r_s のみ変化するということである。ただ、まだシュバルツシルト半径 r_s と極座標半径 r_k の具体的な関数関係は決まっていない。

ここで思考実験をしよう。図 8.3 のように極座標の r_k 一定のところでは θ_k 方向にならんだ定規の長さをその定規に静止している局所ローレンツ系で測ろう。極座標のこの定規の長さは ΔX_k だったとしよう。定規の端

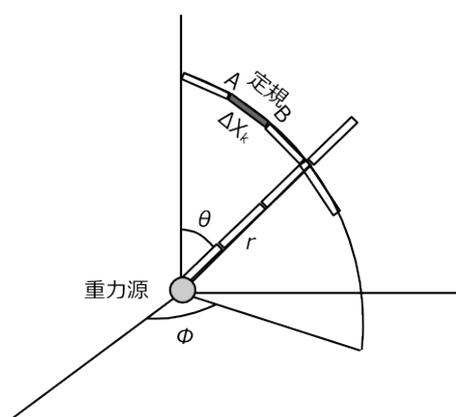


図 8.3

の一方を測った事象を A、もう一方を測った事象を B と呼ぼう。事象 A と事象 B はこの局所慣性系では同時である。さてその長さがこの局所慣性系では ΔX だったとしよう。これはこの慣性系では同時なので事象間の不変距離である。このとき

仮定 3 極座標の r 一定方向の定規の長さは、その定規に静止している局所慣性系での定規の長さと同じ。すなわち $\Delta X_k = \Delta X$ である。

と考えられる。重力中心に対して横方向においてある定規をその定規に対して静止している慣性系で測ると、(もちろんこの慣性系で同時に測るのだが) その距離は重力場に止まっている定規の長さと一致するということである。極座標の $\Delta\theta_k$ は θ_k の定義から $\Delta X_k / r_k$ のことなので

$$\Delta X_k = r_k \Delta\theta_k$$

である。だから仮定 3 は

$$\Delta X = r_k \Delta\theta_k \tag{8.2}$$

ということである。一方シュバルツシルト座標ではこの事象 A と事象 B の間隔はどうなるか。事象 A と事象 B で極座標半径は一定なので、仮定 2 よりシュバルツシルト半径も一定である。そして極座標で ϕ_k が一定な

ので、仮定2よりシュバルツ角の ϕ_s も一定である。だから事象 A と B の不変距離の2乗は、式(8.1)より

$$\left(1 - \frac{\alpha}{r_s}\right) (c\Delta t_s)^2 + r_s^2(\Delta\theta_s)^2$$

である。ところでこの2つの事象 A と B の間でシュバルツシルト時間が異なるというのは考えづらい。というのは球対称な性質からどちらかの事象が早いというのは考えづらいからである。だから

仮定4 極座標に静止した慣性系で重力の横方向に同時の事象 A と事象 B のシュバルツシルト時間は変わらない。すなわち $\Delta t_s = 0$ である。

と推測できる。このことは次節 8.3 でシュバルツシルト座標を局所ローレンツ変換に実際変換して、数学的にも証明される。となるとシュバルツシルト計量からこの事象 A と B の不変距離は $r_s\Delta\theta_s$ となる。つまり、 $\Delta X = r_s\Delta\theta_s$ である。だから式(8.2)より $r_k\Delta\theta_k = r_s\Delta\theta_s$ である。 $\Delta\theta_k = \Delta\theta_s$ なので

結論5 極座標半径の値とシュバルツシルト半径の値は等しい。すなわち $r_k = r_s$ である

と結論される。

次の思考実験をしよう。先ほどと同じことをするのだが、今度は図 8.4 のように極座標の半径方向に並んでいる定規の長さを、その定規に対して静止している慣性系で測ろう。極座標でこの定規の長さは Δr_k だとし

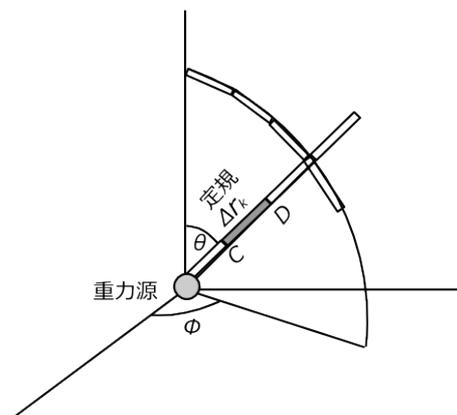


図 8.4

よう。そしてその慣性系で定規の端と端を測った事象を C、D と呼ぼう。事象 C と D はこの慣性系では同時である。さてこの長さがこの慣性系では ΔY だったとしよう。 ΔY は事象 C と D の不変距離である。このときも、

仮定6 極座標の半径方向に並んでいる定規の長さは、その定規に静止している局所慣性系での定規の長さと同じ。すなわち $\Delta r_k = \Delta Y$ である。

と考えられる。というのは互いに静止している定規ならその目盛は完全に一致するとしか考えられないからで

ある (図 8.5)。さてシュバルツシルト座標ではこの事象 C と D はどう表わされるか。極座標では θ_k, ϕ_k も一定なので仮定 1 より $\Delta\theta_s$ も $\Delta\phi_s$ も 0 である。だからシュバルツシルト座標を使つての事象 C と D の不変距離の 2 乗は、式 (8.1) より

$$-\left(1 - \frac{\alpha}{r_s}\right) (c\Delta t_s)^2 + \frac{1}{1 - \alpha/r_s} (\Delta r_s)^2$$

と表される。不変距離は ΔY なので仮定 5 より、これは極座標の定規の長さ Δr_k のことである。すなわち

$$\Delta r_k^2 = -\left(1 - \frac{\alpha}{r_s}\right) (c\Delta t_s)^2 + \frac{1}{1 - \alpha/r_s} (\Delta r_s)^2$$

である。極座標の半径とシュバルツシルト座標の半径は等しいので、すなわち $\Delta r_k = \Delta r_s$ なので、この等式が成り立つためにはシュバルツシルト時間差 t_s は 0 であってはならない。すなわち

結論 7 極座標に静止した慣性系で重力の縦方向の同時の事象ではシュバルツシルト時間差は異なる。すなわち $\Delta t_s \neq 0$ である。

ということである。しかしながら次節 8.3 でみるように、シュバルツシルト座標を局所ローレンツ座標に実際変換して見ると、これは否定されるのである。すなわち $\Delta t_s = 0$ となってしまうのである。なにかかがおかしいのであるが、それは私にはわからない。わかっている人もいないであろう。

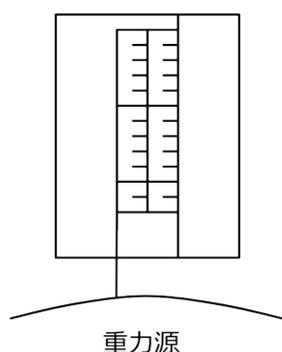


図 8.5 左側の定規は重力源に静止している。右側の定規は局所慣性系に固定されている。定規のどの位置をとっても互いに静止している。だから目盛は完全に一致する。

8.3 局所ローレンツ系への座標変換

この節では、シュバルツシルト座標のある着目点 $t_0, r_0, \theta_0, \phi_0$ を局所ローレンツ座標に変換する。そしてその局所ローレンツ座標を通してシュバルツシルト座標の意味を考えたい。そして前節 8.2 で述べた仮定 4 が正しいことと結論 7 が否定されることを示す。

以下の変換をすると、着目点 $X^\alpha = 0$ 、シュバルツシルト座標では $t_0, r_0, \theta_0, \phi_0$ で、 X 系は局所ローレンツ

系になる。証明は次節 8.4 です。

$$\begin{aligned}
 \sqrt{1-\alpha/r_0} \cdot (ct) - S_0 &= X^0 - AX^1X^0 \\
 \frac{1}{\sqrt{1-\alpha/r_0}} \cdot r - S_1 &= X^1 - \frac{A}{2} [(X^0)^2 - (X^1)^2] + \frac{B}{2} [(X^2)^2 + (X^3)^2] \\
 r_0 \cdot \theta - S_2 &= X^2 - BX^1X^2 + \frac{D}{2}(X^3)^2 \\
 r_0 \sin \theta_0 \cdot \phi - S_3 &= X^3 - BX^1X^3 - DX^2X^3
 \end{aligned} \tag{8.3}$$

ここで

$$S_0 = \sqrt{1-\alpha/r_0} ct_0 \quad S_1 = \frac{r_0}{\sqrt{1-\alpha/r_0}} \quad S_2 = r_0\theta_0 \quad S_3 = r_0 \sin \theta_0 \phi_0$$

であり、 $t_0, r_0, \theta_0, \phi_0$ は着目点である。又 A, B, D は定数で

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{\alpha}{2r_0^2\sqrt{1-\alpha/r_0}} = \frac{GM}{r_0^2c^2\sqrt{1-2GM/(r_0c^2)}}, \\
 B &= \frac{\sqrt{1-\alpha/r_0}}{r_0} = \frac{\sqrt{1-2GM/(r_0c^2)}}{r_0}, \quad D = \frac{\cos \theta_0}{r_0 \sin \theta_0}
 \end{aligned}$$

である。ここで $\alpha = 2GM/c^2$ を使った。この座標変換で、局所ローレンツ系の原点では 1 次の微小量の範囲で

$$\sqrt{1-\alpha/r_0} \cdot \Delta(ct) = \Delta X^0, \quad \frac{1}{\sqrt{1-\alpha/r_0}} \cdot \Delta r = \Delta X^1, \quad r_0 \cdot \Delta \theta = \Delta X^2, \quad r_0 \sin \theta_0 \cdot \Delta \theta = \Delta X^3 \tag{8.4}$$

である。だからこの局所ローレンツ系で原点から例えば X^1 のみ変化させればシュバルツシルト座標では r のみ変化するということである。だから

命題 1 この局所ローレンツ系の原点では図 8.6 のように X^1 座標の向きは r 、 X^2 は θ 、 X^3 は ϕ の向きに一致していることになる。又、この局所ローレンツ系での同時、つまり $\Delta X^0 = 0$ のときはシュバルツシルト座標でも同時で $\Delta t = 0$ である。

と言える。

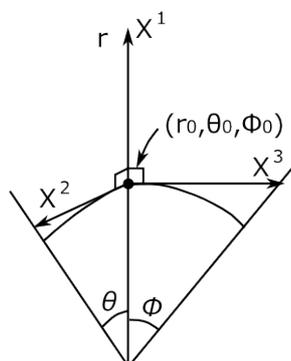


図 8.6

さて、シュバルツシルト座標の着目点の r 軸上の点が X 系でどう表されるかを考えよう。つまり $\theta = \theta_0, \phi = \phi_0$ だが $r \neq r_0, t \neq t_0$ の点を X 系に変換しよう。それには変換式 (8.3) に $\theta = \theta_0, \phi = \phi_0$ を代入すれば良い。すると X^2, X^3 については $X^2 = 0, X^3 = 0$ と求まり、 X^0, X^1 については

$$\sqrt{1 - \alpha/r_0} \cdot (ct) - S_0 = X^0 - AX^0X^1 \quad \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha/r_0}} \cdot r - S_1 = X^1 - \frac{A}{2} [(X^0)^2 - (X^1)^2] \quad (8.5)$$

の解である。ということはシュバルツシルト座標着目点上の $\theta = \theta_0, \phi = \phi_0$ 上の点は時間がたっても X^1 軸上にあるということである (図 8.7)。すなわち着目点から伸びる r 軸は X^1 軸と完全に重なり、時間が経過し

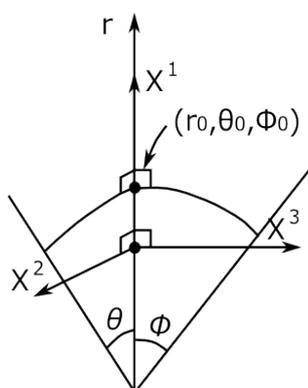


図 8.7

ても重なり続けるということである。さてその着目点から伸びる r 軸上の点が X^1 軸上をどう運動するか調べよう。それには式 (8.5) の 2 番目の式で両辺を X^0 で微分し左辺を 0 とすればよい。すると

$$\frac{dX^1}{dX^0} = \frac{AX^0}{1 + AX^1}$$

を得る*1。 $X^0 = 0$ のとき、 X^1 の値にかかわらず $dX^1/dX^0 = 0$ である。つまり着目点から伸びる r 軸上の点は $X^0 = 0$ のとき、この局所ローレンツ系に静止しているということである。もちろん着目点も静止している。だから逆に言えば、この局所ローレンツ系は $X^0 = 0$ のとき、その空間上の原点はシュバルツシルト座標に静止しているということである。前節で述べたようにシュバルツシルト座標は定規を並べた極座標と同じである。だから、この局所ローレンツ系は極座標に対しても静止しているということである。といことはこの局所ローレンツ系は定規の長さを測った局所ローレンツ系だったのである。ところで命題 1 よりこの局所ローレンツ系の同時ではシュバルツシルト座標でも同時である。これが前節で述べたことの座標変換による証明である。つまり結論 7 は否定されたわけである。そして仮定 4 が正しいことも証明できたわけである。

以下、余分なことなのだが、もう少しこの局所ローレンツ系の性質を書いてみよう。シュバルツシルト座標から見たこの局所ローレンツ座標系の空間上の原点はどういう運動をするかということ、それは変換式 (8.3) で $X^1 = X^2 = X^3 = 0$ としてシュバルツシルト座標を求めればわかる。それは

$$ct = ct_0 + \frac{X^0}{\sqrt{1 - \alpha/r_0}} \quad r = r_0 - \frac{A}{2} (X^0)^2 \sqrt{1 - \alpha/r_0} \quad \theta = \theta_0, \quad \phi = \phi_0$$

*1 尚、この運動は $A = \frac{GM}{r_0^2 c^2 \sqrt{1 - 2GM/(r_0 c^2)}}$ を入れると、ニュートン力学の運動と、そうあるべきだが、ほぼ等しいことがわかる。

となる。 $A = \frac{\alpha}{2r_0^2\sqrt{1-\alpha/r_0}}$ を入れて、 $\alpha = 2GM/c^2$ を使うと

$$r = r_0 - \frac{1}{2} \frac{GM}{r_0^2} \frac{(X^0)^2}{c^2}$$

となる。 X^0 は局所ローレンツ系の時間を使っているのだが、これは古典力学の自由落下の式と完全に一致する。向きは、 r 軸上を負の方向に運動する。

さて、この局所ローレンツ系は、 $X^0 = 0$ でシュバルツシルト座標に静止して時間の経過とともに重力の中心の方へ落ちている。だから自由落下している系と考えられる。自由落下系では常に局所ローレンツ系であり続けると想像できる。しかしながら実際に $X^1 = X^2 = X^3 = 0$ として $g_{\alpha\beta}$ の値を計算してみると X^0 の値によって変化してしまうのである。つまり、この系は時間が経つとすぐに、空間座標の原点においてですら、局所ローレンツ系でなくなる。この $g_{\alpha\beta}$ の計算は少し面倒なので省略する。

8.4 局所ローレンツ系になることの証明

前節 8.3 の変換式 (8.3) で X 系が局所ローレンツ系になっていることを証明しよう。その準備として以下の定理をまず証明する。

定理 2 x 系から X 系への座標変換

$$x^\alpha = X^\alpha + \frac{1}{2} A_{\beta\gamma}^\alpha X^\beta X^\gamma \quad (8.6)$$

で $x^\alpha = 0$ で $g_{\alpha\beta}(x) = \eta_{\alpha\beta}$ ならば、 $X^\alpha = 0$ で X 系は局所ローレンツ系になる。すなわち、原点 $X^\alpha = 0$ で

$$g_{\alpha\beta}(X) = \eta_{\alpha\beta} \quad \left. \frac{\partial g_{\alpha\beta}(X)}{\partial X^\gamma} \right|_0 = 0 \quad (8.7)$$

となる。ここで $A_{\beta\gamma}^\alpha$ は β と γ に関して対称で

$$f(\beta) A_{\alpha\gamma}^\beta + f(\gamma) A_{\alpha\beta}^\gamma = - \left. \frac{\partial g_{\beta\gamma}(x)}{\partial x^\alpha} \right|_0 \quad (8.8)$$

の解である。ここで $\left. \frac{\partial g_{\beta\gamma}(x)}{\partial x^\alpha} \right|_0$ は $x^\mu = 0$ の時の値である。又、 $f(\alpha) \stackrel{\text{def.}}{=} \eta_{\alpha\alpha}$ である。

証明は難しくない。尚、証明を見ればわかることだが、数学的には $\eta_{\alpha\beta}$ は対角行列であればなんでもよく、対角成分が $(-1, 1, 1, 1)$ である必要はない。

【証明】 この変換では明らかに x 系が原点のとき、 X 系も原点である。又、原点で

$$\left. \frac{\partial^2 x^\beta}{\partial X^\alpha \partial X^\gamma} \right|_0 = A_{\alpha\gamma}^\beta$$

となる。さて

$$g_{\alpha\beta}(X) = \frac{\partial x^\mu}{\partial X^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial X^\beta} g_{\mu\nu}(x) \quad (8.9)$$

である。原点で $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu}$ であり、式 (8.6) より $\left. \frac{\partial x^\mu}{\partial X^\alpha} \right|_0 = \delta_\alpha^\mu$ である。だから、原点で $g_{\alpha\beta}(X) = \eta_{\alpha\beta}$ である。まず式 (8.7) の 1 つ目の式が証明できた。次に $\left. \frac{\partial g_{\alpha\beta}(X)}{\partial X^\gamma} \right|_0 = 0$ を証明しよう。式 (8.9) を X^γ で微分

すると

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}(X)}{\partial X^\gamma} = \frac{\partial x^\mu}{\partial X^\gamma \partial X^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial X^\beta} g_{\mu\nu}(x) + \frac{\partial x^\mu}{\partial X^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial X^\gamma \partial X^\beta} g_{\mu\nu}(x) + \frac{\partial x^\mu}{\partial X^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial X^\beta} \frac{\partial x^\sigma}{\partial X^\gamma} \frac{\partial g_{\mu\nu}(x)}{\partial x^\sigma}$$

となる。原点では $\frac{\partial x^\mu}{\partial X^\alpha} = \delta_\alpha^\mu$ 、 $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu}$ なので

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial g_{\alpha\beta}(X)}{\partial X^\gamma} \right|_0 &= \left. \frac{\partial x^\mu}{\partial X^\gamma \partial X^\alpha} \right|_0 \delta_\beta^\nu \eta_{\mu\nu} + \delta_\alpha^\mu \left. \frac{\partial x^\nu}{\partial X^\gamma \partial X^\beta} \right|_0 \eta_{\mu\nu} + \delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu \delta_\gamma^\sigma \left. \frac{\partial g_{\mu\nu}(x)}{\partial x^\sigma} \right|_0 \\ &= f(\beta) \left. \frac{\partial x^\beta}{\partial X^\gamma \partial X^\alpha} \right|_0 + f(\alpha) \left. \frac{\partial x^\alpha}{\partial X^\gamma \partial X^\beta} \right|_0 + \left. \frac{\partial g_{\alpha\beta}(x)}{\partial x^\gamma} \right|_0 \end{aligned}$$

原点での $\frac{\partial^2 x^\beta}{\partial X^\alpha \partial X^\gamma}$ は $A_{\alpha\gamma}^\beta$ なので式 (8.8) から

$$\left. \frac{\partial g_{\alpha\beta}(X)}{\partial X^\gamma} \right|_0 = 0$$

となる。【証明終】

この定理を使って証明するわけだが、まずシュバルツシルト座標 ct, r, θ, ϕ を x^0, x^1, x^2, x^3 座標へ以下のように変換しよう。

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \alpha/r_0} (ct) - \sqrt{1 - \alpha/r_0} (ct_0) &= x^0 & \iff & ct = ct_0 + \frac{x^0}{\sqrt{1 - \alpha/r_0}} \\ \frac{r}{\sqrt{1 - \alpha/r_0}} - \frac{r_0}{\sqrt{1 - \alpha/r_0}} &= x^1 & \iff & r = r_0 + \sqrt{1 - \alpha/r_0} x^1 \\ r_0 \theta - r_0 \theta_0 &= x^2 & \iff & \theta = \theta_0 + \frac{x^2}{r_0} \\ r_0 \sin \theta_0 \phi - r_0 \sin \theta_0 \phi_0 &= x^3 & \iff & \phi = \phi_0 + \frac{x^3}{r_0 \sin \theta_0} \end{aligned}$$

要は、原点をずらして比例定数を掛けているだけである。この変換でシュバルツシルト座標 $ct_0, r_0, \theta_0, \phi_0$ は x 系で原点に移る。シュバルツシルト計量は

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) (c\Delta t)^2 + \frac{1}{1 - \alpha/r} (\Delta r)^2 + r^2 (\Delta \theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta (\Delta \phi)^2$$

なので、 x 系での $g_{\mu\nu}(x)$ は

$$g_{00}(x) = -\frac{1 - \alpha/r}{1 - \alpha/r_0} \quad g_{11}(x) = \frac{1 - \alpha/r_0}{1 - \alpha/r} \quad g_{22}(x) = \frac{r^2}{r_0^2} \quad g_{33}(x) = \frac{r^2 \sin^2 \theta}{r_0^2 \sin^2 \theta_0}$$

となる。だから $x^\mu = 0$ で $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu}$ となる。だからこの x 系から式 (8.6) によって X 系へ変換すれば X 系は原点で局所ローレンツ系になる。そのために $A_{\beta\gamma}^\alpha$ を求めよう。

ct は x^0 のみの、 r は x^1 のみの、 θ は x^2 のみの、 ϕ は x^3 のみの関数である。だから方程式 (8.8) に現れる $\partial g_{\beta\gamma}(x)/\partial x^\alpha$ で 0 でないものは

$$\frac{\partial g_{00}(x)}{\partial x^1} \quad \frac{\partial g_{11}(x)}{\partial x^1} \quad \frac{\partial g_{22}(x)}{\partial x^1} \quad \frac{\partial g_{33}(x)}{\partial x^1} \quad \frac{\partial g_{33}(x)}{\partial x^2}$$

のみである。これらを求めるために

$$\frac{\partial r}{\partial x^1} = \sqrt{1 - \alpha/r_0} \quad \frac{\partial \theta}{\partial x^2} = \frac{1}{r_0}$$

を使う。計算すると

$$\left. \frac{\partial g_{00}(x)}{\partial x^1} \right|_0 = -\frac{\alpha}{r_0^2 \sqrt{1 - \alpha/r_0}} = -2A \quad \left. \frac{\partial g_{11}(x)}{\partial x^1} \right|_0 = -\frac{\alpha}{r_0^2 \sqrt{1 - \alpha/r_0}} = -2A$$

$$\left. \frac{\partial g_{22}(x)}{\partial x^1} \right|_0 = \frac{2\sqrt{1 - \alpha/r_0}}{r_0} = 2B \quad \left. \frac{\partial g_{33}(x)}{\partial x^1} \right|_0 = \frac{2\sqrt{1 - \alpha/r_0}}{r_0} = 2B \quad \left. \frac{\partial g_{33}(x)}{\partial x^2} \right|_0 = \frac{2 \cos \theta_0}{r_0 \sin \theta_0} = 2D$$

となる。さて連立方程式 (8.8)

$$f(\beta)A_{\alpha\gamma}^\beta + f(\gamma)A_{\alpha\beta}^\gamma = -\frac{\partial g_{\beta\gamma}(x)}{\partial x^\alpha}$$

だが、これは α, β, γ の入れ替えだけで閉じている。例えば $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 1, 1)$ なら

$$A_{11}^1 + A_{11}^1 = -\frac{\partial g_{11}(x)}{\partial x^1}$$

であり、 A_{11}^1 は他のところには現れない。そして

$$A_{11}^1 = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{11}(x)}{\partial x^1}$$

と解ける。又、例えば $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 1, 2)$ なら

$$A_{12}^1 + A_{11}^2 = -\frac{\partial g_{12}(x)}{\partial x^1}$$

$$A_{21}^1 + A_{21}^1 = -\frac{\partial g_{11}(x)}{\partial x^2}$$

となる。又、例えば $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 2, 3)$ なら

$$A_{13}^2 + A_{12}^3 = -\frac{\partial g_{23}(x)}{\partial x^1}$$

$$A_{21}^3 + A_{23}^1 = -\frac{\partial g_{31}(x)}{\partial x^2}$$

$$A_{32}^1 + A_{31}^2 = -\frac{\partial g_{12}(x)}{\partial x^3}$$

だから (α, β, γ) の組み合わせの

$$\frac{\partial g_{\beta\gamma}(x)}{\partial x^\alpha} \quad \frac{\partial g_{\gamma\alpha}(x)}{\partial x^\beta} \quad \frac{\partial g_{\alpha\beta}(x)}{\partial x^\gamma}$$

がすべて 0 ならこの組み合わせの $A_{\beta\gamma}^\alpha$ もすべて 0 になる。さて今の場合 5 個の組み合わせが 0 でない。

$\frac{\partial g_{00}(x)}{\partial x^1}$ の組み合わせ

$$\begin{aligned} -A_{10}^0 - A_{10}^0 &= -\frac{\partial g_{00}(x)}{\partial x^1} = 2A & \Rightarrow & A_{10}^0 = -A \\ A_{00}^1 - A_{01}^0 &= -\frac{\partial g_{10}(x)}{\partial x^0} = 0 & & A_{00}^1 = -A \end{aligned}$$

$\frac{\partial g_{11}(x)}{\partial x^1}$ の組み合わせ

$$A_{11}^1 + A_{11}^1 = -\frac{\partial g_{11}(x)}{\partial x^1} = 2A \quad \Rightarrow \quad A_{11}^1 = A$$

$\frac{\partial g_{22}(x)}{\partial x^1}$ の組み合わせ

$$\begin{aligned} A_{12}^2 + A_{12}^2 &= -\frac{\partial g_{22}(x)}{\partial x^1} = -2B & \Rightarrow & \quad A_{12}^2 = -B \\ A_{22}^1 + A_{21}^2 &= -\frac{\partial g_{12}(x)}{\partial x^2} = 0 & & \quad A_{22}^1 = B \end{aligned}$$

$\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1}$ の組み合わせ

$$\begin{aligned} A_{13}^3 + A_{13}^3 &= -\frac{\partial g_{33}(x)}{\partial x^1} = -2B & \Rightarrow & \quad A_{13}^3 = -B \\ A_{33}^1 + A_{31}^3 &= -\frac{\partial g_{13}(x)}{\partial x^3} = 0 & & \quad A_{33}^1 = B \end{aligned}$$

$\frac{\partial g_{33}(x)}{\partial x^2}$ の組み合わせ

$$\begin{aligned} A_{23}^3 + A_{23}^3 &= -\frac{\partial g_{33}(x)}{\partial x^2} = -2D & \Rightarrow & \quad A_{23}^3 = -D \\ A_{33}^2 + A_{32}^3 &= -\frac{\partial g_{23}(x)}{\partial x^3} = 0 & & \quad A_{33}^2 = D \end{aligned}$$

まとめると

$$\begin{array}{llll} A_{10}^0 = -A & & & \\ A_{00}^1 = -A & A_{11}^1 = A & A_{22}^1 = B & A_{33}^1 = B \\ A_{12}^2 = -B & A_{33}^2 = D & & \\ A_{13}^3 = -B & A_{23}^3 = -D & & \end{array}$$

ここで求めた $A_{\beta\gamma}^\alpha$ の値を式 (8.6)、すなわち

$$x^\alpha = X^\alpha + \frac{1}{2} A_{\beta\gamma}^\alpha X^\beta X^\gamma$$

に代入すれば

$$\begin{aligned} x^0 &= X^0 - AX^1 X^0 \\ x^1 &= X^1 - \frac{A}{2} [(X^0)^2 - (X^1)^2] + \frac{B}{2} [(X^2)^2 + (X^3)^2] \\ x^2 &= X^2 - BX^1 X^2 + \frac{D}{2} (X^3)^2 \\ x^3 &= X^3 - BX^1 X^3 - DX^2 X^3 \end{aligned} \tag{8.10}$$

と求まるわけである。

第9章

重力場内の剛体

前章では結局シュバルツシルト座標について筋の通った理解を得ることができなかった。それでもっと物理的な状況を考えて重力というものを理解したいと思い、思考実験を試みた。まず加速度系での大きさのある物体の運動を考え、それを重力場中の運動と対比してみた。ただ結局は筋の通った理解というのは得られなかった。それでもこういう場合はこんな矛盾があるという意味でここに掲載した。筋の通った理解のためへの礎にしたい。理想的な剛体という概念なくして長さという概念もありえないのであり、あらゆる物理量は長さをもとに測っているのだからそういう概念も意味を成さなくなってしまう。

9.1 広域ローレンツ系内での定常等加速する運動はないこと

広域ローレンツ系内での定常等加速する物体の運動が存在しないことを証明しよう。まず状況から説明する。あるローレンツ系に長さのある（つまり質点でない）物体があるとする。図9.1のようにこの物体の端の点をそれぞれA、Bとする。A、Bはそれぞれ静止ローレンツ系座標で等加速しているとする。ある質点の静



図9.1

止ローレンツ系座標とはその質点が静止しているローレンツ系座標のことである。だから点Aは最初、Aの静止ローレンツ系座標で加速度 a で加速し、次の瞬間には別の静止ローレンツ系座標で加速度 a をもつ。BもAと同じようにBの静止系で加速度 a を持つ。尚、ある1つの固定されたローレンツ系座標から見るとそういう運動の加速度は(1.5)で示したように

$$a(1 - v^2/c^2)^{3/2} \tag{9.1}$$

となる。つまり加速度は小さくなっていく。さてこの静止系等加速度運動は定常的でない。すなわち

命題2 A、Bはそれぞれの静止ローレンツ系で等加速し、その加速度はA、Bともに同じなら、Aの静止ローレンツ系座標からABの距離を測ると、それは変化する。そしてAの静止ローレンツ系からBの速度を測ると、それは変化する。

これを証明しよう。

(証明)

加速度の向きはAからBの向きとする。ある瞬間のAの事象をOと呼ぼう(図9.2)。その事象OでAが静止しているローレンツ系をS系と呼ぼう。この事象Oの瞬間、S系でのABの距離は1だとする。それからS系で時間 t 経過したときのAの事象を α 、Bの事象を β と呼ぼう。事象 α が起きた時のS系でのAの速度を v とし、事象 α が起きた時、Aが静止しているローレンツ系をS'系と呼ぼう。S'系での事象 α と同時のBの事象を β' と呼ぼう。

(ア) まずS系から見て、事象OのときBは静止しているとしよう。つまりS系では最初AもBも速度0で、そして加速度 $a(1 - v^2/c^2)^{3/2}$ で運動するということである。だからS系では時間が経過してもAB間の距離は変わらず1である。以下の説明は図9.2を見ればわかりやすいと思う。S'系からみると事象 $\alpha\beta$ の空間

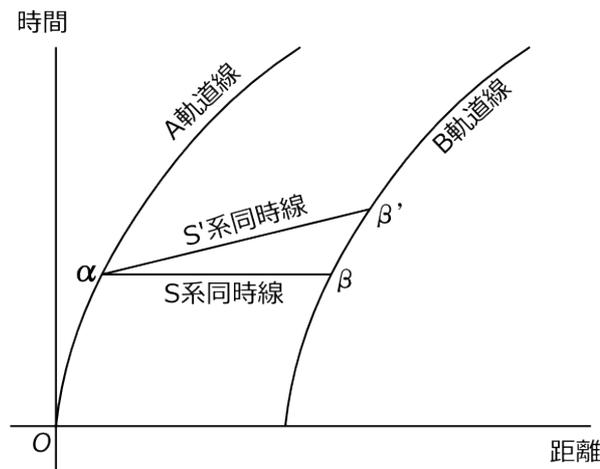


図9.2 (ア)の場合のS系でのAとBの軌道線

距離は

$$\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

である。S'系からみると事象 β は事象 α より先に起きる。S系では事象 α と β のときAとBの速度は等しい。だからS'系でも事象 α と β ではAとBの速度は等しい。S'系では事象 α のときAは静止しているので、事象 β のときBは静止している。そしてBはS'系での事象 α と同時の時刻である事象 β' まで加速しAから離れる。だからS'系では事象 α と事象 β' の空間距離は $\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ よりさらに大きくなる。そしてそのときのBの速度は0でない。というわけでS系では最初Bの速度が0だったのがS'系では0でなく

なり、AB間の距離はS系では1だったのがS'系では1より大きくなる。以上から最初AからみてBが止まっていたは定常的ではないことがわかった。

(イ) では次にS系から見て、事象OのときBはAから離れる方向に速さを持っているとしよう。するとS'系でのABの空間距離は(ア)の設定の時よりさらに大きくなってしまう。これは(図9.3)をみれば明らかであろう。つまり距離は1より大きくなる。だからAからみてすでにAから離れる向きに速さを持っている状況は定常的ではないのである。尚、速度の関係が定常的かどうかはわからない。今記号を用いてわかりやすく説明したが最初Aからみて離れる向きにBが動いていたなら、その後距離が広がるのは自明であろう。

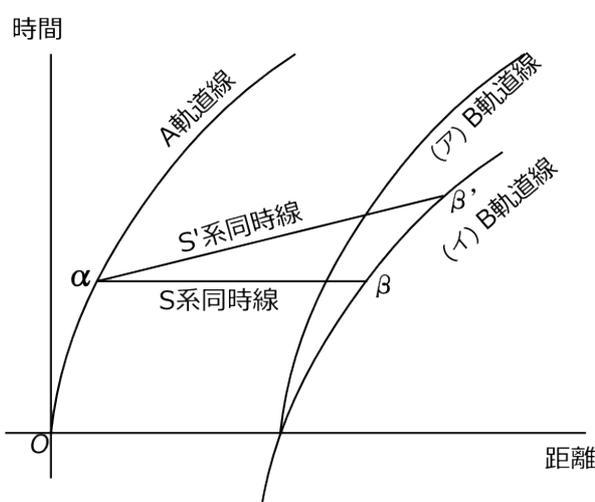


図9.3 (イ)の場合のS系でのAとBの軌道線。Bについては(ア)の場合と(イ)の場合の両方描いた。

(ウ) 最後にS系から見て、事象OのときBはAに近づく方向に速さを持っているとしよう(図9.4)。時間 t は十分小さく取ってS系では事象 β' のときBはまだ最初の運動の向きに動いているとしよう。S系では α と β' の空間距離は1より小さい。まだBが最初の運動の向きに動いているからである。ということはS'系では α と β' の空間距離はS系のその $\sqrt{1-v^2/c^2}$ 倍でありさらに小さくなる。つまり1より小さくなる。つまりこの場合も定常的ではないというわけである。これも今記号を用いてわかりやすく説明したが最初Aから見て近づく向きにBが動いていたなら、その後しばらくは距離が縮まるのは自明であろう。速度に関しては定常的かどうかは何とも言えない。【証明終】

9.2 重力場内に静止している剛体にいったい何が起きているのか

さて次に図9.5のように重力源に固定された剛体を考えよう。これは上記等加速度運動と類似している。Aに静止しているローレンツ系から見ればAは常に右へ等加速度で動く。Bについても同じだが、地球に近い分だけ加速度が少しは大きくなるが*1。さて前と異なるのは

*1 そこで1つの思考実験を試みよう。重力源として無限に広い平板があるとする。このときの重力はどうなるか。平行板コンデンサーからの類推で言えば、重力は平板からの距離にかかわらず一定となるであろう。ただそれはあくまで類推であって、なんと

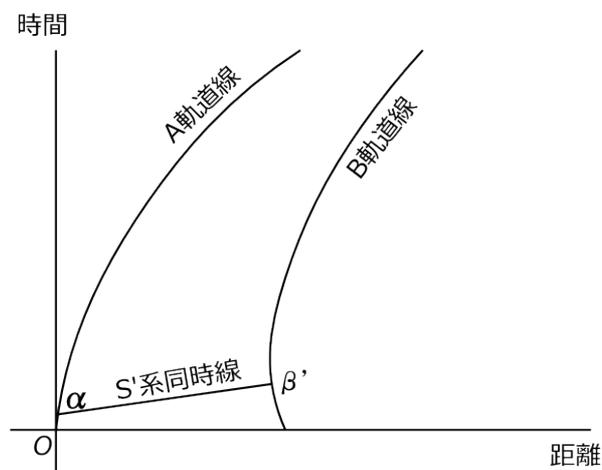


図 9.4 (ウ) の場合の S 系での A と B の軌道線

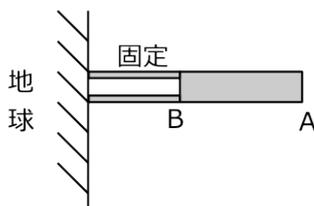


図 9.5

地球に固定された物体の距離 AB は A に静止しているローレンツ系から見て常に距離が等しいということである。

このことは自明だろう。さてこの 2 つの状況に違いはなぜ起こるのだろうか。唯一考えられるのは重力場では局所的にしかローレンツ系は存在しえないということである。例えば最初 A が止まっていた系 1 (図 9.6 の (1)) は自由落下し、図 9.6 の (2) の状況になる。そして A を覆う局所ローレンツ系が系 2 に変わる。この系 2 は系 1 とはローレンツ変換では結ばれないということである。図 9.6 の (2) の状況で系 1 を右に延長するとそれはもう系 1 の延長した場所ではローレンツ系ではなくなるということである。しかしこれはあくまでも空想の域を出ていない話である。

なんとか重力を微視的視点に立って理解しようとしたが今のところはわかっていないというのが私の状況であり、おそらくわかっている人もいないであろう。

も言えない。

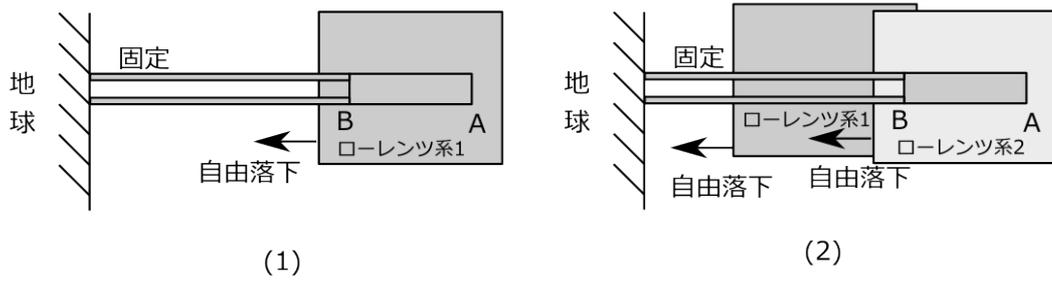


図 9.6

付録 A

特殊相対論の公式

ダッシュ系はダッシュなし系から見て x 軸方向に速度 u で動いている系。

速度の変換則

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - uv_x/c^2}, \quad v'_y = \frac{\sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 - uv_x/c^2} v_y, \quad v'_z = \frac{\sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 - uv_x/c^2} v_z$$
$$(\text{H} \quad v'_x = v_x - u, \quad v'_y = v_y, \quad v'_z = v_z)$$
$$\mathbf{v}'_{\parallel} = \frac{\mathbf{v}_{\parallel} - \mathbf{u}}{1 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}/c^2}, \quad \mathbf{v}'_{\perp} = \frac{\sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}/c^2} \mathbf{v}_{\perp}$$

4 元速度

$$V^{\alpha} \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{dX^{\alpha}}{d\tau} \quad V^{\alpha} = \left(\frac{c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \frac{v_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \frac{v_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \frac{v_z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right)$$

加速度の変換則

$$a'_x = \left(\frac{\sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 - uv_x/c^2} \right)^3 a_x$$
$$a'_y = \frac{1 - u^2/c^2}{(1 - uv_x/c^2)^3} \left[\left(1 - \frac{uv_x}{c^2} \right) a_y + \left(\frac{uv_y}{c^2} \right) a_x \right]$$
$$a'_z = \frac{1 - u^2/c^2}{(1 - uv_x/c^2)^3} \left[\left(1 - \frac{uv_x}{c^2} \right) a_z + \left(\frac{uv_z}{c^2} \right) a_x \right]$$
$$(\text{H} \quad a'_x = a_x, \quad a'_y = a_y, \quad a'_z = a_z)$$
$$\mathbf{a}'_{\parallel} = \left(\frac{\sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}/c^2} \right)^3 \mathbf{a}_{\parallel} \quad \mathbf{a}'_{\perp} = \frac{1 - u^2/c^2}{(1 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}/c^2)^3} \left[\left(1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2} \right) \mathbf{a}_{\perp} + \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{c^2} \right) \mathbf{v}_{\perp} \right]$$

静止系 \bar{a} からの加速度の変換則

$$a'_x = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} \bar{a}_x, \quad a'_y = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \bar{a}_y, \quad a'_z = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \bar{a}_z$$

$$\mathbf{a}'_{\parallel} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} \bar{\mathbf{a}}_{\parallel}, \quad \mathbf{a}'_{\perp} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \bar{\mathbf{a}}_{\perp}$$

4元加速度 A^α

$$A^\alpha \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{dV^\alpha}{d\tau} \quad A^0 = \frac{\mathbf{a} \cdot \frac{\mathbf{v}}{c}}{\left(1 - v^2/c^2\right)^2}, \quad \mathbf{A} = \frac{\mathbf{a}}{1 - v^2/c^2} + \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}/c}{\left(1 - v^2/c^2\right)^2} \frac{\mathbf{v}}{c}$$

4元運動量の定義

$$P^\alpha \stackrel{\text{def.}}{=} m \frac{dX^\alpha}{d\tau} \quad (\alpha = 0, 1, 2, 3) \quad P^\alpha = \left(\frac{mc}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right)$$

力の定義

$$\mathbf{f} \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{d\mathbf{P}}{dt} \quad \mathbf{f} = \frac{m\mathbf{a}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{m\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}/c}{\left(1 - v^2/c^2\right)^{3/2}} \frac{\mathbf{v}}{c}$$

力の変換則

$$f'_x = \frac{1}{1 - uv_x/c^2} \left[f_x - \frac{u}{c} \left(\mathbf{f} \cdot \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \right] \quad f'_y = \frac{\sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 - uv_x/c^2} f_y \quad f'_z = \frac{\sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 - uv_x/c^2} f_z$$

静止系 \bar{f} からの力の変換則

$$f'_x = \bar{f}_x \quad f'_y = \sqrt{1 - v^2/c^2} \bar{f}_y \quad f'_z = \sqrt{1 - v^2/c^2} \bar{f}_z$$

$$\mathbf{f}'_{\parallel} = \bar{\mathbf{f}}_{\parallel} \quad \mathbf{f}'_{\perp} = \sqrt{1 - v^2/c^2} \bar{\mathbf{f}}_{\perp}$$

恒等式

$$\frac{dP^0}{dt} = \mathbf{f} \cdot \frac{\mathbf{v}}{c}$$

付録 B

特殊相対論・電磁気学の公式

任意の単位系への変換

	SI 単位系	cgs ガウス単位系	cgs 静電単位系	cgs 電磁単位系	cgs ヘビサイドローレンツ単位系
k_1	$1/4\pi\epsilon_0$	1	1	c^2	$1/4\pi$
k_2	1	c	1	1	c

$k_2 = c$ を入れた式を掲載する。他の単位系に移るには

$$\mathbf{B} \rightarrow \frac{c}{k_2} \mathbf{B} \quad \mathbf{A} \rightarrow \frac{c}{k_2} \mathbf{A}$$

と置き換え、 k_2 にその単位系の値を入れれば良い。

ローレンツ力

$$m \frac{d\mathbf{V}}{dt} = e \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) \iff \Delta \mathbf{P} = \frac{e}{c} \left(\mathbf{E} (c\Delta t) + \Delta \mathbf{X} \times \mathbf{B} \right)$$

電磁場の変換 ダッシュ系はダッシュなし系から見て x 軸方向に速度 u で動いている系

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x & E'_y &= \frac{E_y - (u/c)B_z}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} & E'_z &= \frac{E_z + (u/c)B_y}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \\ B'_x &= B_x & B'_y &= \frac{B_y + (u/c)E_z}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} & B'_z &= \frac{B_z - (u/c)E_y}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \end{aligned}$$

$$\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel} \quad \mathbf{E}'_{\perp} = \frac{\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{u}/c \times \mathbf{B}_{\perp}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad \mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel} \quad \mathbf{B}'_{\perp} = \frac{\mathbf{B}_{\perp} - \mathbf{u}/c \times \mathbf{E}_{\perp}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

ローレンツ力・テンソル形式

$$\Delta P^{\alpha} = \frac{e}{c} f^{\alpha}_{\beta} \Delta X^{\beta} \quad f^{\alpha}_{\beta} \stackrel{\text{def.}}{=} \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{縦方向は } \alpha \text{ 横方向は } \beta$$

4元電流密度

$$J^\alpha \stackrel{\text{def.}}{=} \left(\rho, \frac{i_x}{c}, \frac{i_y}{c}, \frac{i_z}{c} \right)$$

マクスウェル方程式・テンソル形式

$$\left(\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi k_1 \rho, \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 4\pi k_1 \frac{\mathbf{i}}{c} \right) \iff \partial_\beta f^{\alpha\beta} = 4\pi k_1 J^\alpha$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \iff \partial_\alpha f_{\beta\gamma} + \partial_\beta f_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma f_{\alpha\beta} = 0$$

$$f^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ -E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} \quad f_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

電磁場のエネルギー・運動量

エネルギー密度	W	$\frac{1}{8\pi k_1} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2)$
エネルギー流れの面密度	\mathbf{S}	$\frac{c}{4\pi k_1} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$
運動量密度	\mathbf{G}	$\frac{1}{4\pi k_1 c} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$
運動量流れの密度	M^{ij}	$\frac{1}{4\pi k_1} \left(\frac{1}{2} \mathbf{E}^2 \delta_{ij} - E_i E_j + \frac{1}{2} \mathbf{B}^2 \delta_{ij} - B_i B_j \right)$

$$\frac{\mathbf{S}}{c} = c \mathbf{G}$$

エネルギー運動量テンソル

$$T^{\alpha\beta} \stackrel{\text{def.}}{=} \begin{pmatrix} W & S_x/c & S_y/c & S_z/c \\ c G_x & M_{xx} & M_{xy} & M_{xz} \\ c G_y & M_{yx} & M_{yy} & M_{yz} \\ c G_z & M_{zx} & M_{zy} & M_{zz} \end{pmatrix} \quad T^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi k_1} \left(\eta_{\lambda\gamma} f^{\lambda\alpha} f^{\gamma\beta} - \frac{\eta^{\alpha\beta}}{4} f_{\lambda\gamma} f^{\lambda\gamma} \right)$$

エネルギー運動量保存

$$\frac{\partial W}{\partial(ct)} + \nabla \cdot \frac{\mathbf{S}}{c} + \mathbf{E} \cdot \frac{\mathbf{i}}{c} = 0 \quad \frac{\partial c \mathbf{G}}{\partial(ct)} + \nabla \cdot M + \left(\rho \mathbf{E} + \frac{\mathbf{i}}{c} \times \mathbf{B} \right) = 0 \iff \nabla_\beta T^{\alpha\beta} + f^\alpha_\beta J^\beta = 0$$

スカラー・ベクトルポテンシャルのテンソル形式

$$A_\alpha \stackrel{\text{def.}}{=} (-\phi, \mathbf{A}) \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \iff f_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$$

ローレンツ条件

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \iff \partial_\alpha A^\alpha = 0 \quad A^\alpha = (\phi, \mathbf{A})$$

ポテンシャル方程式

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \phi = 4\pi k_1 \rho \quad \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \mathbf{A} = 4\pi k_1 \frac{\mathbf{i}}{c} \iff \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) A^\alpha = 4\pi k_1 J^\alpha$$

付録 C

一般相対論の公式

接続係数の定義

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{2}g^{\alpha\kappa}(x) \left(\frac{\partial g_{\gamma\kappa}(x)}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\kappa\beta}(x)}{\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}(x)}{\partial x^{\kappa}} \right)$$

局所ローレンツ座標との関係

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}(x) = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial X^{\kappa}} \frac{\partial X^{\kappa}}{\partial x^{\beta} \partial x^{\gamma}} = - \left(\frac{\partial}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial X^{\kappa}} \right) \frac{\partial X^{\kappa}}{\partial x^{\gamma}}$$

共変微分

$$\nabla_{\nu} A^{\mu} \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\nu\sigma}^{\mu} A^{\sigma}$$

$$\nabla_{\nu} A_{\mu} \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \Gamma_{\nu\mu}^{\sigma} A_{\sigma}$$

$$\nabla_{\nu} A^{\mu\kappa} \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\partial A^{\mu\kappa}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\nu\sigma}^{\mu} A^{\sigma\kappa} + \Gamma_{\nu\sigma}^{\kappa} A^{\mu\sigma}$$

$$\nabla_{\nu} A_{\mu\kappa} \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\partial A_{\mu\kappa}}{\partial x^{\nu}} - \Gamma_{\nu\mu}^{\sigma} A_{\sigma\kappa} - \Gamma_{\nu\kappa}^{\sigma} A_{\mu\sigma}$$

$$\nabla_{\nu} A^{\mu}_{\kappa} \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\partial A^{\mu}_{\kappa}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\nu\sigma}^{\mu} A^{\sigma}_{\kappa} - \Gamma_{\nu\kappa}^{\sigma} A^{\mu}_{\sigma}$$

曲率テンソルの定義

$$R^{\alpha}_{\beta\gamma\lambda} \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\partial \Gamma_{\beta\lambda}^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma_{\beta\lambda}^{\rho} \Gamma_{\rho\gamma}^{\alpha} - \Gamma_{\beta\gamma}^{\rho} \Gamma_{\rho\lambda}^{\alpha}$$

曲率テンソルと共変微分

$$(\nabla_{\gamma} \nabla_{\lambda} - \nabla_{\lambda} \nabla_{\gamma}) A^{\alpha} = R^{\alpha}_{\beta\gamma\lambda} A^{\beta}$$

$$(\nabla_{\gamma} \nabla_{\lambda} - \nabla_{\lambda} \nabla_{\gamma}) A_{\alpha} = -R^{\beta}_{\alpha\gamma\lambda} A_{\beta}$$

リッチのテンソル

$$R_{\alpha\beta} \stackrel{\text{def.}}{=} R^{\lambda}_{\alpha\lambda\beta}$$

$$R_{\alpha\beta} = R_{\beta\alpha}$$

スカラー曲率

$$R \stackrel{\text{def.}}{=} g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}$$

重力場の方程式

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\alpha\beta} \quad R_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4}(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Tg_{\alpha\beta})$$

$$R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg^{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4}T^{\alpha\beta} \quad R^{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4}(T^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Tg^{\alpha\beta})$$

自由粒子の運動方程式

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu(x) \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0$$

一般座標での電磁気学

$$\frac{d^2x^\nu}{d\tau^2} + \Gamma_{\sigma\mu}^\nu(x) \frac{dx^\sigma}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{e}{mc} f_{\nu\mu}^\nu(x) \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

$$\nabla_\nu f^{\mu\nu}(x) = 4\pi k_1 J^\mu(x) \quad \partial_\mu f_{\nu\gamma}(x) + \partial_\nu f_{\gamma\mu}(x) + \partial_\gamma f_{\mu\nu}(x) = 0$$

エネルギー運動量テンソル

$$T^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{4\pi k_1} \left(g_{\alpha\beta}(x) f^{\alpha\mu}(x) f^{\beta\nu}(x) - \frac{g^{\mu\nu}(x)}{4} f_{\alpha\beta}(x) f^{\alpha\beta}(x) \right)$$

$$\text{保存則} \quad \nabla_\nu T^{\mu\nu}(x) = -f_{\nu}^\mu(x) J^\nu(x)$$

ベクトルポテンシャル

$$f_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$$\nabla_\nu A^\nu = 0$$

$$g^{\alpha\gamma} R_{\rho\gamma} A^\rho - g^{\lambda\gamma} \nabla_\lambda \nabla_\gamma A^\alpha = 4\pi k_1 J^\alpha$$

電場と4元ポテンシャルの関係

ローレンツ条件

4元ポテンシャルを決定する方程式

シュバルツシルト計量

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) (c\Delta t)^2 + \frac{1}{1 - \alpha/r} (\Delta r)^2 + r^2 (\Delta\theta)^2 + r^2 \sin^2\theta (\Delta\phi)^2 \quad \alpha = \frac{2GM}{c^2}$$

シュバルツシルト計量の接続係数

$$\Gamma_{01}^0 = \frac{\alpha}{2r^2(1 - \alpha/r)}$$

$$\Gamma_{00}^1 = \frac{\alpha}{2r^2} \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)$$

$$\Gamma_{22}^1 = -r \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma_{11}^1 = -\frac{\alpha}{2r^2(1 - \alpha/r)}$$

$$\Gamma_{33}^1 = -r \sin^2\theta \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\sin\theta \cos\theta$$

$$\Gamma_{23}^3 = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

シュバルツシルト計量場での自由粒子の運動方程式

$$(u')^2 + u^2 - \frac{\alpha c^2}{h^2} u + \frac{c^2 - B^2}{h^2} = \alpha u^3$$

$$B = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) \frac{d(ct)}{d\tau} \quad h = r^2 \frac{d\phi}{d\tau} \quad u = \frac{1}{r} \quad u' = \frac{du}{d\phi}$$

シュバルツシルト計量場での光の運動方程式

$$(u')^2 + u^2 - \frac{B^2}{h^2} = \alpha u^3$$

参考文献

- [1] 光の軌跡の変換としてのローレンツ変換 2011 年
<http://bakamoto.sakura.ne.jp/buturi/hikari-2011-6-28.pdf>
- [2] 内山龍雄著 「相対性理論」 物理テキストシリーズ 岩波書店 1977 年
決してわかりやすい本ではないし、説明も丁寧ではないが、薄い小さな本ながらも、相対性理論全体にわたっての記述がある。
- [3] 佐藤勝彦著 「相対性理論」 岩波書店 1996 年
部分的に少し読んだだけである。私が知りたいようなことが書いてある本ではない。エネルギーテンソルや曲率テンソルは本によって符号が異なるが、この論文ではこの本の符号を使った。
- [4] アインシュタイン選集 2 [A3] 一般相対性理論の基礎 共立出版 1970 年
- [5] 物理学辞典 培風館 1992 年