円柱磁石の作る磁場、磁束、磁石間の力の計算式の導出

2014 年 4 月 6 日

概要

円柱磁石の作る磁場、磁束、磁石間の力の計算式の導出する。単なる足し算の解説であり、何も深い内容はない。記号の説明は少し雑かもしれない。

第 I 部
電流による方法

磁石による磁場の計算法には 2 つある。磁石を微小閉電流の集まりとみなす方法と、微小磁石とみなす方法だ。まず、微小電流の方法から始める。

1 円電流の磁場

まず準備として円電流の作る磁場を求めよう。図 1 のように電流 I が半径 r の円上を流れているとしよう。座標系として XY 平面をその円と同一平面にとり、原点を円と一致させる。その時の点 $(x, 0, z)$ の磁場（この論文では通常磁束密度と呼ばれているものを磁場と呼ぶことにする。）を求めよう。ビオサバールの法則により、磁場 $\mathbf{B}$ は

$$\mathbf{B} = k_2 k \int \frac{\mathbf{I} \times \mathbf{d}}{d^3} dl$$

である。SI 単位系では $k = 1/(4\pi\epsilon_0 c^2)$ $k_2 = 1$、ガウス単位系では $k = 1/c^2$ $k_2 = c$、静電単位系では $k = 1/c^2$ $k_2 = 1$、電磁単位系では $k = 1$ $k_2 = 1$、ヘビサイドローレンツ単位系では $k = 1/4\pi c^2$ $k_2 = c$ である。点 1 での $\mathbf{I}, \mathbf{d}$ の成分は図 1、図 2 より

$$\mathbf{I} = (-I \sin\theta, I \cos\theta, 0)$$

$$\mathbf{d} = (x - r\cos\theta, -r\sin\theta, z)$$

である。これから

$$(\mathbf{I} \times \mathbf{d})_x = I\ z\cos\theta$$
$$(\mathbf{I} \times \mathbf{d})_y = I\ z\sin\theta$$
$$(\mathbf{I} \times \mathbf{d})_z = I\ (r - x\cos\theta)$$

$$d^3 = \left((r - x\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 + z^2\right)^{3/2}$$

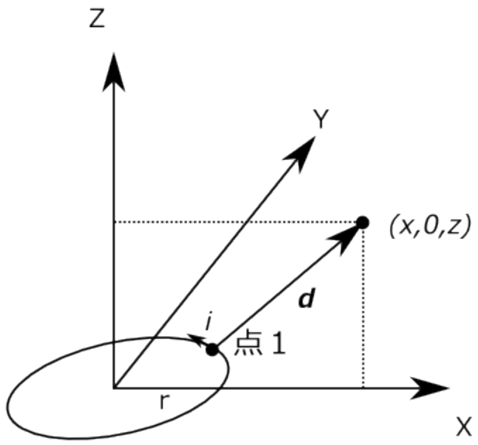

図 1

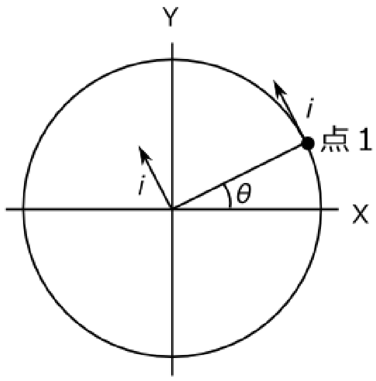

図 2

また

$$dl = rd\theta$$

である。B_y は被積分関数が θ と $-\theta$ で同じ値になるので 0 となる。以上から磁場は以下の補題のとおりとなる。

補題 1

電流 I が半径 r の円上を流れているとしよう。円は xy 平面上で中心は原点にあるとする。その時の点 $(x,0,z)$ の磁場は

$$B_x = k_2 kI \int_0^{2\pi} \frac{rz\cos\theta^*}{((r-x\cos\theta^*)^2+(r\sin\theta^*)^2+z^2)^{3/2}} d\theta^*$$

$$B_y = 0$$

$$B_z = k_2 kI \int_0^{2\pi} \frac{r(r-x\cos\theta^*)}{((r-x\cos\theta^*)^2+(r\sin\theta^*)^2+z^2)^{3/2}} d\theta^*$$

となる。

2 円柱磁石による磁場

次は円柱磁石による磁場を求める。磁石は微小閉電流の集まりとする。電流は中では打ち消しあうので外だけを考えれば良い。微小磁石による磁場はあとで求める。図 3 のような位置関係を考える。補題 1 の電流 I が Jdz に変わり、これを磁石の高さのぶんだけ足し合わせれば良いわけだから、

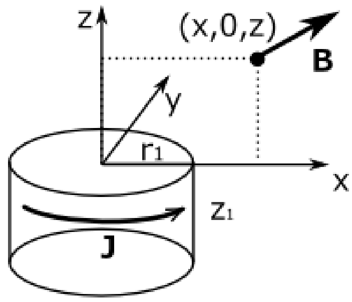

図 3

補題 2　円柱磁石による磁場

図 3 のような半径 r_1、高さ z_1、面電流密度 J の磁石による点 $(x, 0, z)$ における磁場は

$$B_x = k_2 kJ \int_z^{z+z_1} dz^* \int_0^{2\pi} \frac{r_1 z^* \cos\theta^*}{((r_1 - x\cos\theta^*)^2 + (r_1 \sin\theta^*)^2 + z^{*2})^{3/2}} d\theta^*$$

$$B_y = 0$$

$$B_z = k_2 kJ \int_z^{z+z_1} dz^* \int_0^{2\pi} \frac{r_1(r_1 - x\cos\theta^*)}{((r_1 - x\cos\theta^*)^2 + (r_1 \sin\theta^*)^2 + z^{*2})^{3/2}} d\theta^*$$

となる。

3　円内の磁束

次に図 4 のように磁石から距離 z にある半径 r_2 の円内を通る磁束を求める。これは補題 2 で求めた磁場 B_z に面積要素 $2\pi x dx$ をかけて 0 から r_2 まで足し合わせればいいわけである。だから

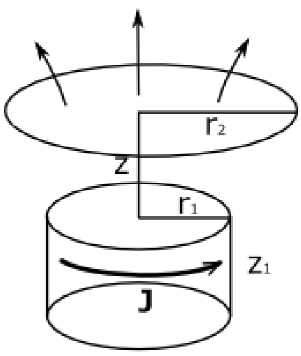

図 4

補題 3

半径 r_1、高さ z_1、面電流密度 J の磁石による z 離れた半径 r_2 内を通る磁束は

$$\phi = k_2 kJ \int_0^{r_2} 2\pi x^* dx^* \int_z^{z+z_1} dz^* \int_0^{2\pi} \frac{r_1(r_1 - x^* \cos\theta^*)}{((r_1 - x^* \cos\theta^*)^2 + (r_1 \sin\theta^*)^2 + z^{*2})^{3/2}} d\theta^*$$

となる。

4　磁気モーメントに掛かる力

磁気モーメントに掛かる力を簡単に説明する。磁気モーメント $\mathbf{m}$ にかかる力はどの単位系でも

$$\mathbf{F} = (\mathbf{m} \cdot \nabla)\mathbf{B}$$

である。今の場合単位体積あたりの磁気モーメントは $m = J/k_2$ で方向は z 方向である。単位

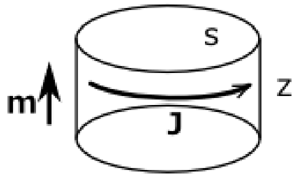

図 5

体積あたりの z 方向への力は

$$F_z = \frac{J}{k_2}\frac{\partial B_z}{\partial z}$$

である。これを磁石の体積分足し合わせると

$$\begin{aligned} F_z &= \frac{J}{k_2}\int dS \int \frac{\partial B_z}{\partial z} dz \\ &= \frac{J}{k_2}\int (B_z(z) - B_z(0))dS \\ &= \frac{J}{k_2}(\phi(z) - \phi(0)) \end{aligned}$$

となる。これはまるで、表面に J/k_2 の磁荷があるかのような力となる。結果を補題としてまとめると

> 補題 4
> 面電流密度 J、高さ z の円柱形の磁石にかかる力は上面を貫く磁束から下面を貫く磁束を引いたものであり、
> $$F_z = \frac{J}{k_2}(\phi(z) - \phi(0))$$
> である。

5　磁石間の力

図 6 のような、2 つの円柱形の磁石に働く力を求めよう。円柱の中心軸は一致しているとする。片方の磁石の半径は r 高さは,z_1 面電流密度は J_1、もう一方を r_2, z_2, J_2、磁石間の距離は z とする。補題 3、4 を使うと磁石間の力はすぐ求まる。

$$F_z = \frac{J_2}{k_2}(\phi(z + z2) - \phi(z_2))$$

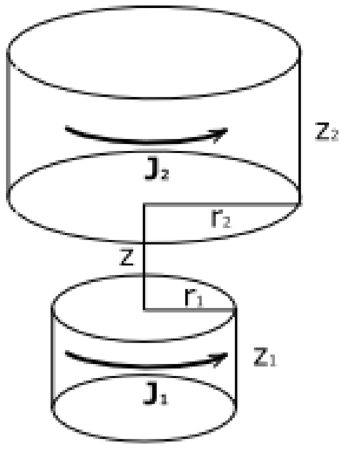

図 6

である。省略しないで書くと、

命題 1　2 つの円柱形の磁石に働く引力
図 4 のように、円柱の中心軸は一致し、一方の磁石の半径は r_1 高さは,z_1 面電流密度は J_1、もう一方を r_2, z_2, J_2、磁石間の距離は z とする。J の向きは図 5 の向きを正とし、引き合う力を正とすると

$$F = kJ_1J_2\int_0^{r_2} 2\pi x^* dx^* \int_z^{z+z_1} dz^* \int_0^{2\pi} \left[S(z^*) - S(z^* + z_2)\right] d\theta^*$$

ここで

$$S(z^*) = \frac{r_1(r_1 - x^*\cos\theta^*)}{((r_1 - x^*\cos\theta^*)^2 + (r_1\sin\theta^*)^2 + z^{*2})^{3/2}}$$

添字の 1 と 2 の入替に関して対称には見えないが、もちろん対称である。

5.1　直接法

磁気モーメントの補題 4 を使わずに直接ローレンツ力から磁石間の力を求めてみよう。図 7 から、面電流要素 Jds が磁場 B から受ける力は JB_xｄｓ$/k_2$ である。磁気モーメントの方法を使わずこの方法で、磁石間の力を求めてみよう。力は

$$J \cdot 2\pi r_2 dz \cdot B_x/k_2$$

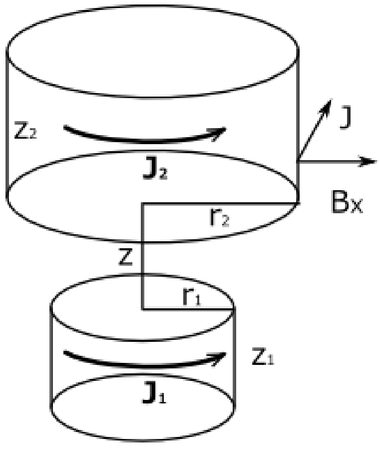

図 7

を積分すれば良いわけである。すなわち補題 2 で求めた B_x に電流要素 $J \cdot 2\pi r_2 dz \cdot /k_2$ をかけて積分すればよい。力は

$$F = \frac{2\pi r_2 J_2}{k_2} r_2 \int_z^{z+z_2} B_x(z^{**}) dz^{**}$$
$$= 2\pi k J_1 J_2 r_1 r_2 \int_z^{z+z_2} dz^{**} \int_{z^{**}}^{z^{**}+z_1} dz^* \int_0^{2\pi} \frac{r_1 z^* \cos\theta^*}{((r_1 - r_2\cos\theta^*)^2 + (r_1 \sin\theta^*)^2 + z^{*2})^{3/2}} d\theta^*$$

となる。上の積分の

$$\int_z^{z+z_2} dz^{**} \int_{z^{**}}^{z^{**}+z_1} dz^*$$

の部分は図のような積分範囲となる図の平行四辺形の高さを $f(z^*)$ とすれば、この積分は

$$\int_z^{z+z_1+z_2} f(z^*) dz^*$$

となる。これは物理的には電流要素から磁束の高さが一定の部分を先に積分しそれが f となり、その後電流要素から磁束までの距離をすべて足し合わせることに対応している。だから力は

$$F = 2\pi k J_1 J_2 r_1 r_2 \int_z^{z+z_1+z_2} f(z^*) dz^* \int_0^{2\pi} \frac{z^* \cos\theta^*}{((r_1 - r_2\cos\theta^*)^2 + (r_1 \sin\theta^*)^2 + z^{*2})^{3/2}} d\theta^*$$

となる。この式は引き合う向きを正の向きとしている。

命題 2　2 つの円柱形の磁石に働く引力　別法

図 4 のように、円の軸は一致し、片方の磁石の半径は r_1 高さは,z_1 面電流密度は J_1、もう一方を r_2, z_2, J_2、磁石間の距離は z とすると引き合う力を正の向きとすると

$$F = k J_1 J_2 r_1 r_2 \int_z^{z+z_1+z_2} f(z^*) dz^* \int_0^{2\pi} \frac{z^* \cos\theta^*}{((r_1 - r_2\cos\theta^*)^2 + (r_1 \sin\theta^*)^2 + z^{*2})^{3/2}} d\theta^*$$

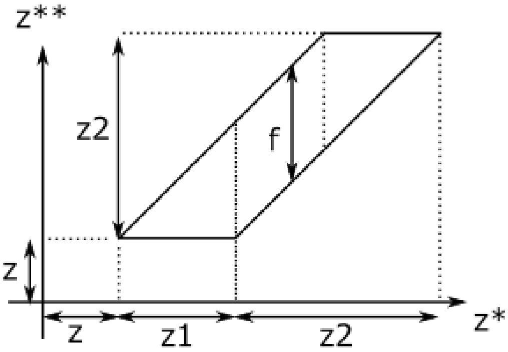

図 8

命題 1 と命題 2 が同じ結果を出すことは言うまでもない。命題 2 のほうが 1 と 2 の対称性があるように見える。

6　コイルの磁束

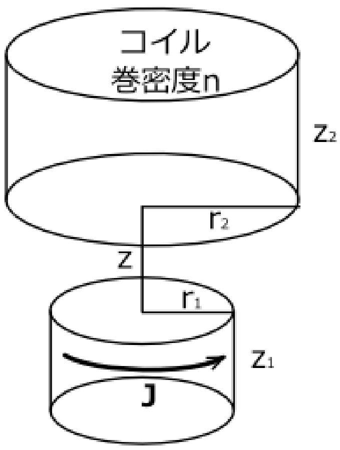

図 9

最後に図 9 の配置でのコイルの磁束の計算式を導出する。これは補題 3 で求めた磁束を ndz をかけて積分し範囲は z から z_2 である。すなわち

$$n\int_{z}^{z+z2}\phi(z^{**})dz^{**}$$

である。省略せずに書くと

$$\psi = 2\pi k_2 kJn\int_{z}^{z+z_2}dz^{**}\int_0^{r_2}x^*dx^*\int_{z^{**}}^{z^{**}+z_1}dz^*\int_0^{2\pi}\frac{r(r-x^*\cos\theta^*)}{((r-x^*\cos\theta^*)^2+(r\sin\theta^*)^2+z^{*2})^{3/2}}d\theta^*$$

となる。z*と z**の積分は前節と同じ形である、だから図 8 の f を使うと

$$\psi = 2\pi k_2 kJn \int_z^{z+z_1+z_2} f(z^*)dz^* \int_0^{r_2} x^* dx^* \int_0^{2\pi} \frac{r(r - x^* \cos\theta^*)}{((r - x^* \cos\theta^*)^2 + (r \sin\theta^*)^2 + z^{*2})^{3/2}} d\theta^*$$

となる。

命題 3　コイルの磁束
図 9 のように半径 r_1 高さ z_1 の円柱磁石があり、半径 r_2 高さ z_2、巻密度 n の円柱のコイルがある。距離は z 離れており、両者の円柱軸は一致しているとする。そのとき磁石がコイルに作る磁束は

$$\psi = 2\pi k_2 kJn \int_z^{z+z_1+z_2} f(z^*)dz^* \int_0^{r_2} x^* dx^* \int_0^{2\pi} \frac{r_1(r_1 - x^* \cos\theta^*)}{((r_1 - x^* \cos\theta^*)^2 + (r_1 \sin\theta^*)^2 + z^{*2})^{3/2}} d\theta^*$$

となる。

なお、この式よりこの形の場合の相互インダクタンスが直ちに求められる。つまり J を n_1 に変えると 1 と 2 の相互インダクタンスとなる。そのとき 1 と 2 の入れ替えに関して対称となる。

第 II 部
双極子の方法

7　電流と磁荷の同等性

閉電流に関しては以下の命題が成り立つ

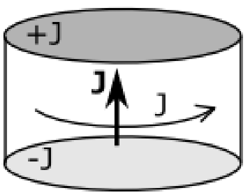

図 10

命題 4　磁荷と電流の同等性
図 10 のような面電流が流れている物体がある場合、電流の右ねじの向きの上表面にプラス J の面磁荷密度があり、逆面にマイナス J の面磁荷密度があり、物体間の力を

$$F = k\frac{J_1 J_2}{r^2}$$

として計算しても電流の場合と同じ計算結果が出る。また、磁場は

$$B = k_2 k\frac{J}{r^2}$$

と計算しても同じ結果が得られるただし物体内部では

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{\mathrm{jika}} + 4\pi k_2 k\mathbf{J}$$

$\mathbf{B}_{\mathrm{jika}}$ は磁荷の作る磁場という意味である。$\mathbf{J}$ は大きさ J で右ねじの向きの方向のベクトルである。SI 単位系では $k = 1/(4\pi\epsilon_0 c^2)$ $k_2 = 1$、ガウス単位系では $k = 1/c^2$ $k_2 = c$、静電単位系では $k = 1/c^2$ $k_2 = 1$、電磁単位系では $k = 1$ $k_2 = 1$、ヘビサイドローレンツ単位系では $k = 1/4\pi c^2$ $k_2 = c$ である。

この命題は磁場の様子をイメージするには便利である。これを使って、図 11 の半径 r_1、高さ z_1 の磁石が作る点 $(x, 0, z)$ の磁場を求める。微小面 ds の作る磁場 $\mathbf{b}$ は

$$\mathbf{b} = k_2 k\frac{J\mathbf{d}}{d^3}ds$$

である。

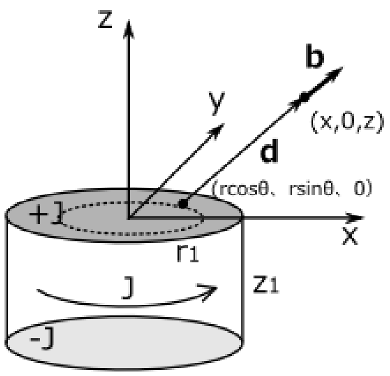

図 11

$$\mathbf{d} = (x - r\cos\theta, -r\sin\theta, z)$$

$$ds = rd\theta dr$$

なのでこの面が作る磁場は

$$
\begin{aligned}
b_x &= k_2 k J \int_0^{r_1} dr^* \int_0^{2\pi} d\theta^* \frac{x}{((x - r^* \cos\theta)^2 + (r^* \sin\theta)^2 + z^2)^{3/2}} \\
b_y &= 0 \\
b_z &= k_2 k J \int_0^{r_1} dr^* \int_0^{2\pi} d\theta^* \frac{z}{((x - r^* \cos\theta)^2 + (r^* \sin\theta)^2 + z^2)^{3/2}}
\end{aligned}
$$

実際の磁場を求めるにはマイナスの磁荷の分だけ惹かなければならない。上式の z を z + z_1 に入れ替えた式で引いてやると磁石による磁場が求まる、つまり

補題 2-2

図 11 のような半径 r_1、高さ z_1、面電流密度 J の磁石による点 $(x, 0, z)$ における磁場は

$$
\begin{aligned}
B_x &= k_2 k J \int_0^{r_1} dr^* \int_0^{2\pi} d\theta^* \left[h(z) - h(z + z_1) \right] \\
B_y &= 0
\end{aligned}
$$

磁石の外では

$$
B_z(\mathrm{out}) = k_2 k J \int_0^{r_1} dr^* \int_0^{2\pi} d\theta^* \left[g(z) - g(z + z_1) \right]
$$

磁石の中では

$$
B_z(\mathrm{in}) = B_z(\mathrm{out}) + 4\pi k_2 k J
$$

となる。ここで

$$
\begin{aligned}
h(z) &= \frac{x}{((x - r^* \cos\theta^*)^2 + (r^* \sin\theta^*)^2 + z^2)^{3/2}} \\
g(z) &= \frac{z}{((x - r^* \cos\theta^*)^2 + (r^* \sin\theta^*)^2 + z^2)^{3/2}}
\end{aligned}
$$

となる。これはもちろん補題 2 で求めたのと同じ計算結果を与える。これからあとは第一部とほぼ同じである。

8　円内の磁束

円内の磁束を求めるのはもちろん第 1 部同様、磁場に面積要素 $2\pi x^* dx^*$ をかけて 0 から r_2 まで足し合わせればいいわけである。だから

補題 3-2
半径 r_1、高さ z_1、面電流密度 J の磁石による z 離れた半径 r_2 内を通る磁束は

$$\phi = k_2 k J \int_0^{r_2} 2\pi x^* dx^* \int_0^{r_1} dr^* \int_0^{2\pi} \Big(4\pi J \delta(x^*, z) + [g(z) - g(z + z_1)]\Big) d\theta^*$$

ここで

$$g(z) = \frac{z}{((x^* - r^* \cos\theta^*)^2 + (r^* \sin\theta^*)^2 + z^2)^{3/2}}$$

$\delta(x^*, z)$ は磁石の内部のみ 1 となる関数。式で書くと

$$\begin{aligned} \delta(x^*, z) &= 1 \qquad x^* \leq r_1 \text{かつ} - z_1 \leq z \leq 0 \text{ のとき} \\ \delta(x^*, z) &= 0 \qquad \text{それ以外} \end{aligned}$$

9 磁石間の力

磁石間の力は磁石 2 の両面の力の合力だから上下のちからを足し合わせれば良い。補題 3-2 の磁束に J をかければひとつの面にかかる力が求まるので

命題 1-2 2 つの円柱形の磁石に働く引力
図 4 のように、円柱の中心軸は一致し、片方の磁石の半径は r 高さは,z_1 面電流密度は J_1、もう一方を r_2, z_2, J_2、磁石間の距離は z とする。J の向きは図 5 の向きを正とすると、磁石間の引力は

$$F = 2\pi k J_1 J_2 \int_0^{r_2} x^* dx^* \int_0^{r_1} dr^* \int_0^{2\pi} d\theta^* \left(g(z) - g(z + z_1) - g(z + z_2) + g(z + z_1 + z_2)\right)$$

ここで

$$g(z) = \frac{z}{((x^* - r^* \cos\theta^*)^2 + (r^* \sin\theta^*)^2 + z^2)^{3/2}}$$

である。

これでは 1 と 2 の対称性が見えない。が対称である。

10 コイルの磁束

これも第 1 部同様、補題 3-2 で求めた磁束を ndz をかけて積分し範囲は z から z 2 である。すなわち

命題 3-2　コイルの磁束
図 9 のように半径 r_1 高さ z_1、面電流密度 J の円柱磁石があり、半径 r_2 高さ z_2、巻密度 n の円柱のコイルがある。距離は z 離れており、両者の円柱軸は一致しているとする。そのとき磁石がコイルに作る磁束は

$$\psi = 2\pi k_2 k J n \int_z^{z+z_2} dz^* \int_0^{r_2} x^* dx^* \int_0^{r} dr^* \int_0^{2\pi} d\theta^* \left[g(z^*) - g(z^* + z_1)\right]$$

となる。ここで

$$g(z) = \frac{z}{((x^* - r^* \cos\theta^*)^2 + (r^* \sin\theta^*)^2 + z^2)^{3/2}}$$

である。